Chapitre 1 : Rappels de mécanique classique

- **Mécanique d'une particule**
- Travail et énergie.
- Systèmes à N particules et forces extérieures.
- Degrés de liberté.

Mécanique d'une particule

Point matériel

Un point matériel ou « particule » est un corps dont on peut **négliger** les dimensions lorsqu'on décrit son mouvement.

La **position** d'une particule dans l'espace est déterminée par son rayon vecteur $\vec{r}$,La dérivée de $\vec{r}$ par rapport au temps t

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad (1)$$

est appelée **vitesse** du point.

La quantité de mouvement

La quantité de mouvement $\vec{p}$ de la particule est définie comme **le produit** de la **masse** de la particule par sa **vitesse**:

$$\overrightarrow{p} = m\,\overrightarrow{V} \qquad (2)$$

La force totale

La deuxième loi du mouvement de Newton, stipule que la force totale $\vec{F}$ de la particule est décrite par l'équation différentielle

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \equiv \dot{\vec{P}} \qquad (3)$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{V}\right) \qquad (4)$$

Dans la plupart des cas, la masse de la particule est constante et l'équation (4) se réduit à

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\ \vec{a} \qquad (5)$$

où $\vec{a}$ est l'accélération vectorielle de la particule définie par :

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \qquad (6)$$

Exemple 1

Une particule de masse $\boldsymbol{m}$ ($\boldsymbol{m} = 2kg$) se déplace dans un champ de force en fonction du temps t donné par

$$\vec{F} = 24\,t^2\,\vec{i} + (36t - 16)\,\vec{j} - 12\,t\,\vec{k}$$

En supposant qu'à $t = 0$ la particule est située à

$\vec{r_0} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ et à une vitesse $\vec{V_0} = 6\,\vec{i} + 15\vec{j} - 8\vec{k}$

Trouver

(a) la vitesse

(b) la position, à tout instant t.

Exemple 2

Trouver la vitesse $\dot{x}$ et la position x en fonction du temps d'une particule de masse ***m*** qui part du repos à $x = 0$ et $t = 0$, soumis aux fonctions de force suivantes:

$(a) F_x = F_0 + ct$

$(b) F_x = F_0 \sin ct$

$(c) F_x = F_0 e^{ct}$

ou F_0 et c sont des constantes positifs.

Exemple 3

Trouver la vitesse $\dot{x}$ en fonction du déplacement x pour une particule de masse $\boldsymbol{m}$ qui part du repos à $x = 0$ et $t = 0$, soumis aux fonctions de force suivantes:

$$(a)F_x = F_0 + cx$$

$$(b)F_x = F_0 e^{-cx}$$

$$(c)F_x = F_0 \cos cx$$

Théorème de conservation de la quantité de mouvement linéaire d'une particule

L'équation (3) fournit directement le premier théorème :

Si la force totale $\vec{F}$ *, est nulle, alors* $\dot{\vec{p}} = 0$*, et l'impulsion linéaire* $\vec{p}$*, est conservée.*

Théorème de conservation du moment cinétique d'une particule

Le moment cinétique de la particule autour du point ***O***, noté $\vec{L}$ est défini comme :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \qquad (7)$$

Où $\vec{r}$ est le vecteur position de ***O*** à la particule. Notez que l'ordre des facteurs est important.

Nous définissons maintenant le moment de la force ou du couple autour de ***O*** comme :

$$\vec{N} = \vec{r} \wedge \vec{F} \qquad (8)$$

$$\vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{N} = \vec{r} \wedge \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{V}\right) \qquad (9)$$

L'équation (9) peut être écrite sous une forme différente en utilisant l'identité vectorielle:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \wedge m\,\vec{V}\right) = \underbrace{\vec{V} \wedge m\,\vec{V}}_{0} + \vec{r} \wedge \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{V}\right) \qquad (10)$$

où le premier terme à droite disparaît évidemment. À la suite de cette identité, l'équation (9) prend la forme :

$$\vec{N} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \wedge m\,\vec{V}\right) = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}} \qquad (11)$$

Théorème :

Si le couple total, $\vec{N}$ *est nul, alors* $\dot{\vec{L}} = 0$*, et le moment cinétique* $\vec{L}$ *est conservé.*

Exemple 4

Déterminer le moment de la force et le moment cinétique autour de l'origine de la particule de l'**exemple 1** à tout instant *t* et vérifier que $\vec{N} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}}$

Travail et Energie

Dans cette partie nous allons introduire les notions importantes de:

- ***travail***,
- ***d'énergie cinétique***,
- des ***forces conservatives***,
- ***d'énergie potentielle***
- et ***d'énergie mécanique***.

Nous verrons que ces grandeurs et les relations qui les relient peuvent être utilisées pour résoudre simplement des problèmes de mécanique.

Travail élémentaire

Un mobile se déplace dans l'espace de la position (***A***) à (***B***) sous l'action d'une force $\vec{F}(r)$.

Entre les instants (***t)*** et (***t + dt)***, le mobile a effectué un déplacement élémentaire de vecteur $\overrightarrow{dl}$.

Le travail élémentaire dW effectué par le vecteur force $\vec{F}(r)$ pendant ce déplacement est défini par le produit scalaire :

$$dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} \qquad (12)$$

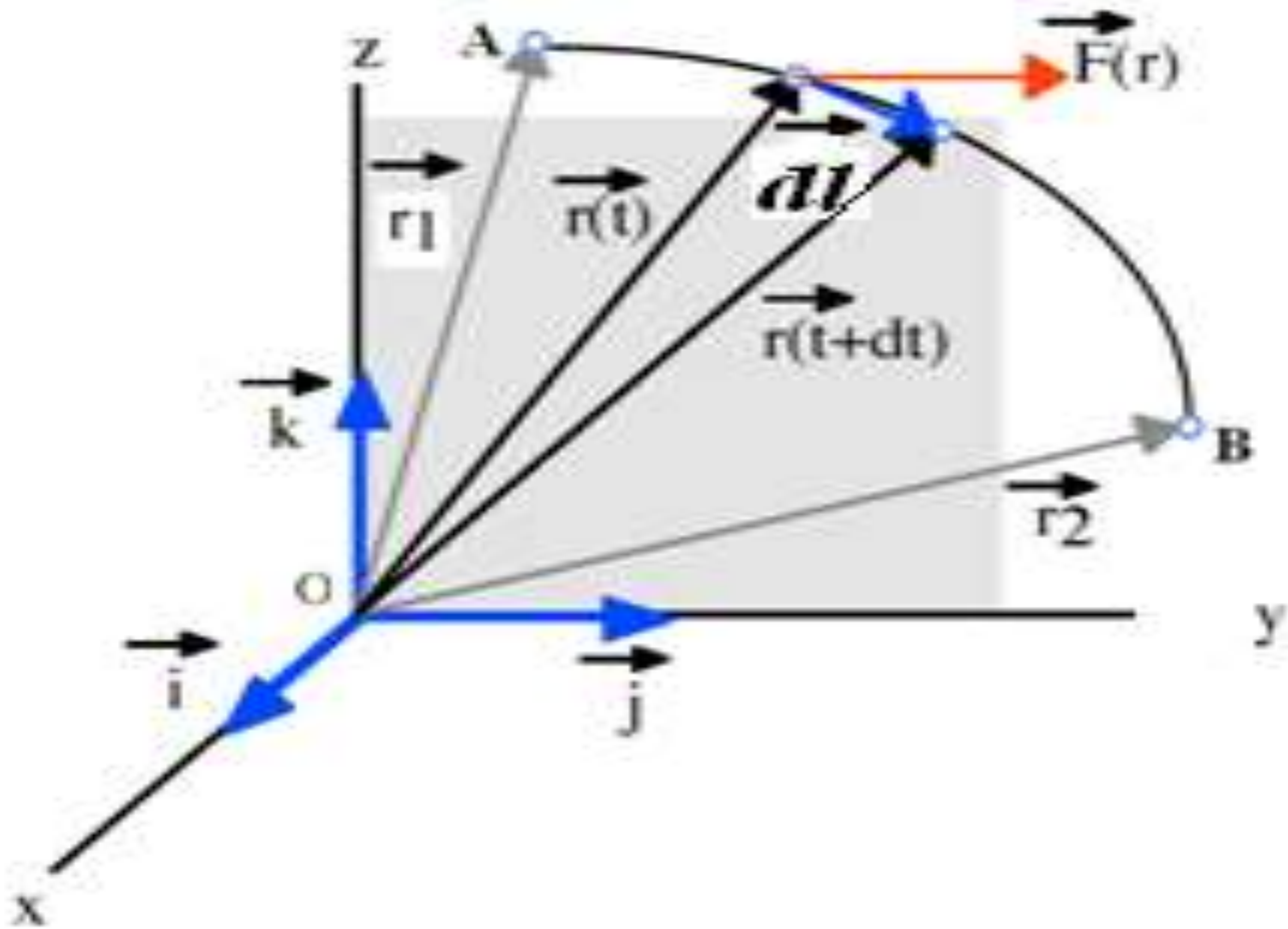
$$dW = \|\vec{F}\|\|\overrightarrow{dl}\| \cos\theta \qquad (13)$$

où θ est l'angle que fait la direction de la force $\vec{F}(r)$ avec le déplacement $\overrightarrow{dl}$.

Pour un déplacement total de (***A***) (à l'instant t_A) à (***B***) (à l'instant t_B)

tout au long de la Courbe ***C***, on obtient l'expression :

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} \qquad (14)$$



Dans le système SI, on exprime le travail en newton-mètre, unité appelée joule. $J = Nm = m^2\ kg\ s^{-2}$

$$[J] = L^2MT^{-2}$$

Exemple 5

Une force $\boldsymbol{F = 6t}$ **(*N*)** agit sur une particule de masse **2 *kg***. La particule étant immobile au départ, trouver le travail effectué par la force pendant les deux premières secondes.

Energie cinétique : une énergie liée au mouvement

Considérons un point matériel M se déplaçant, sous l'action d'un ensemble de forces extérieures. Le mouvement de ce point est régi par le principe fondamental de la dynamique, soit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} \qquad (16)$$

Au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$, la somme des travaux élémentaires des forces extérieures est donnée par :

$$\sum \vec{F}_{ext}.d\vec{l} = \left(m.\vec{a}\right).d\vec{l} = m\frac{d\vec{V}}{dt}.d\vec{l} = m\vec{V}.d\vec{V}$$

Par intégration de cette relation sur un trajet ***AB*** nous obtenons :

$$m\int_{V_A}^{V_B} \vec{V}.d\vec{V} = \sum \int_A^B \vec{F}_{ext}.d\vec{l} = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{ext}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m\left(V_B^2 - V_A^2\right) = \sum W_{A\to B}} \to (17)$$

Où V_B est la vitesse de la particule en (B) et V_A celle en(A).

Théorème de l'énergie cinétique : La variation d'énergie cinétique d'un point matériel, soumis à un ensemble de forces extérieures, entre une position (A) et une position (B), est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points :

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = E_{C_B} - E_{C_A} = \Delta E_C = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext})$$

Exemple 6

En utilisant les données de l'exemple **5**, calculer directement l'énergie cinétique que la particule acquiert pendant le temps ***t***.

Forces conservatives et Energie potentielle

Forces conservatives : (ou forces dérivant d'une énergie potentiel)

Ce sont les forces dont le travail ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des positions initiales (point de départ) et finales (point d'arrivée), aussi une force qui dérive d'une énergie potentielle est dite « conservative ».

Théorème :

Un champ de force $\overrightarrow{F}$ est conservatif si et seulement s'il existe un champ scalaire E_P continuellement différentiable tel que

$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\nabla}\, E_P = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_P$ ou, de manière équivalente, si et seulement si

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{F} = 0$$

Exemple 7

Soit , $\vec{F} = \left(\underbrace{y + 2.z + e^{x}}_{F_x} \right) . \vec{i} + \underbrace{x}_{F_y} . \vec{j} + \underbrace{2x}_{F_z} . \vec{k}$

cette force est-elle conservative ?

Exemple 8

Même question de l'exemple (7) pour

$$\vec{F} = \left(\underbrace{x^2 - y^2}_{F_x} \right) . \vec{i} + \underbrace{3xy}_{F_y} . \vec{j}$$

Energie potentielle : une énergie liée à la position

Si la force $\vec{F}$ est une force dérivant d'une énergie potentielle (conservative), alors :

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = E_{P_A} - E_{P_B} \qquad (18)$$

Remarquons que nous écrivons $E_{P_A} - E_{P_B}$ et non $E_{P_B} - E_{P_A}$; autrement dit, le travail accompli est égal à E_P au point de départ moins E_P au point d'arrivée.

De l'expression d'intégrale (18), il est possible de déduire la définition différentielle de l'énergie potentielle :

$$\boxed{dE_P = -\vec{F}.\vec{dl}}$$

La différentielle de l'énergie totale peut s'exprimé par :

$$dE_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz \qquad (20)$$

D'un autre côté on a :

$$\overrightarrow{grad}E_P = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)E_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}E_P.\vec{dl} = \left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}\right).\left(dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}\right) \quad \text{avec: } \vec{dl} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}E_P.\vec{dl} = \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz \qquad \text{donc: } \boxed{\overrightarrow{grad}E_P.\vec{dl} = dE_P}$$

alors: $dE_P = -\vec{F}.\vec{dl} \Leftrightarrow \overrightarrow{grad}E_P.\vec{dl} = -\vec{F}.\vec{dl}$ Finalement:

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P} \qquad (21)$$

Exemple 9

Soit l'énergie potentielle $E_P = 2x^2 - xy + yz$.

Trouver l'expression de la force dans le système des coordonnées cartésiennes.

Conservation de l'énergie d'une particule

Nous partons du théorème de l'énergie cinétique dans lequel nous faisons apparaître le travail des forces conservatives et celui des forces non conservatives, soit :

$$E_{C_B} - E_{C_A} = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}^{\,C}_{ext}) + \sum W_{A\to B}(\vec{F}^{\,NC}_{ext}) \quad \text{avec:} \quad \sum W_{A\to B}(\vec{F}^{\,C}_{ext}) = E_{P_B} - E_{P_A}$$

$$E_{C_B} - E_{C_A} = E_{P_A} - E_{P_B} + \sum W_{A\to B}(\vec{F}^{\,NC}_{ext})$$

$$E_{C_B} - E_{C_A} - E_{P_A} + E_{P_B} = \sum W_{A\to B}(\vec{F}^{\,NC}_{ext})$$

$$\left[E_{C_B} + E_{P_B}\right] - \left[E_{C_A} + E_{P_A}\right] = \sum W_{A\to B}(\vec{F}^{\,NC}_{ext}) \qquad (22)$$

Il apparaît une nouvelle fonction d'état homogène à une énergie et dont la variation s'exprime en fonction uniquement du travail des forces non conservatives. Cette nouvelle fonction correspond à l'énergie mécanique.

L'énergie mécanique d'un système est égale à la somme des énergies cinétique et potentielle. C'est une fonction d'état :

$$E_M = E_C + E_P \qquad (23)$$

Théorème de l'énergie mécanique : Du résultat (22) on en déduit le théorème suivant :

La variation d'énergie mécanique d'un système entre deux points ***A*** et ***B*** est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées au système entre ces deux points.

$$\Delta E_M = E_{MB} - E_{MA} = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}^{NC}) \qquad (24)$$

Exemple 10

Une particule de masse *m* est soumise à une force de rappel $\boldsymbol{F(x) = - kx}$ déplace dans le sens positive avec une énergie cinétique initiale .

k et *A* sont des constantes positifs, trouvé :

a) la fonction de l'énergie potentielle de cette force.

b) l'énergie cinétique.

c) l'énergie totale de cette particule en fonction de sa position.

Système à *N* particules et forces extérieures

Supposons un système de ***N*** particules interagissant entre elles et sur lesquelles peuvent également agir des forces extérieures. Notons:

- m_i la masse de la $i^{ième}$ particule,
- $\overrightarrow{F_i}$ la force externe qui agit sur la $i^{ième}$ particule
- $\overrightarrow{F_{ij}}$ la force due à l'interaction de la $j^{ième}$ particule sur la $i^{ième}$.

Evidemment

- $\overrightarrow{F_{jj}} = 0$
- par la troisième loi de Newton $\overrightarrow{F_{ij}} = -\overrightarrow{F_{ji}}$ (*Les forces que deux particules exercent l'une sur l'autre sont égales et opposées*. Cette hypothèse est parfois appelée loi faible de l'action et réaction.)

Pour la $i^{ième}$ particule, l'équation de mouvement est

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij} \qquad (25)$$

Sommant sur toutes les particules

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \qquad (26)$$

La première somme à droite est tout simplement la force extérieure totale tandis que le second terme disparaît, puisque la loi d'action et de réaction stipule que chaque paire est égale à zéro.

Alors l'équation (26) prend la forme

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F} \qquad (27)$$

Pour réduire le côté gauche de l'équation (27), nous définissons un vecteur , avec $M = \sum_i m_i$: masse totale des ***N*** particules,

$$\vec{F} = M\left[\frac{1}{M}\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i\right] = M\,\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i\right] \qquad (28)$$

$$\vec{F} = M\,\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_{cm} \ : \text{où} \qquad \boxed{\vec{r}_{cm} = \left[\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}\right]} \qquad (29)$$

Le vecteur $\vec{r}_{cm}$ définit un point dit centre de masse du système (figure 1).

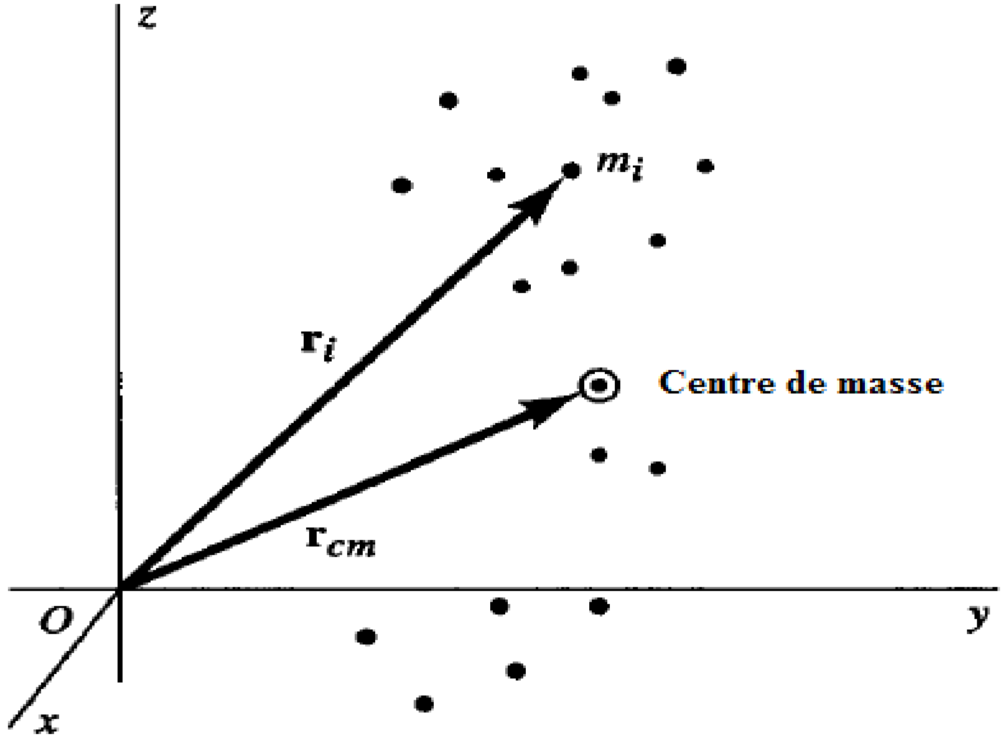


Figure 1 : Centre de masse d'un système de particules

Le mouvement du centre de masse se fait comme si toute la masse y était concentrée et que la force externe totale s'y appliquait, *quelle que soit* l'interaction entre les particules.

Exemple 11

Un système de particules se compose d'une masse de 3 grammes située en $(1,0,-1)$, d'une masse de 5 grammes en $(-2,1,3)$ et d'une masse de 2 grammes en $(3,-1,1)$. Trouver les coordonnées du centre de masse.

L'impulsion linéaire du système

Nous définissons l'impulsion linéaire $\vec{p}$ du système comme la somme vectorielle des impulsions linéaires des particules individuelles, à savoir,

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{V}_i \qquad (30)$$

En calculant $\dot{\vec{r}}_{cm} = \vec{V}_{cm}$ à partir de l'équation (29) et en comparant avec l'équation (30), il s'ensuit que

$$\boxed{\vec{p} = M \vec{V}_{cm}} \qquad (31)$$

Autrement dit, la quantité de mouvement d'un système de particules est égale à la vitesse du centre de masse multipliée par la masse totale du système.

Exemple 12

Montrer que si la quantité de mouvement totale d'un système est constante, c'est-à-dire conservée, alors le centre de masse est soit au repos, soit en mouvement à vitesse constante.

Exemple 13

Un système composé de trois particules, chacune des unités de masse, avec les positions et les vitesses comme suit:

$$\vec{r}_1 = \vec{i} + \vec{j} \quad ; \quad \vec{V}_1 = 2\vec{i}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{j} + \vec{k} \quad ; \quad \vec{V}_2 = \vec{j}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{k} \quad ; \quad \vec{V}_3 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

Trouver la position et la vitesse du centre de masse. Retrouvez également la quantité de mouvement du système et vérifier que la quantité de mouvement d'un système de particules est égale à la vitesse du centre de masse multipliée par la masse totale du système.

Le moment angulaire total

Nous avons évidemment par rapport à l'origine ***O***

$$\vec{L} = \sum_{i}^{N} \vec{l}_i = \sum_{i}^{N} \vec{r}_i \wedge m_i \vec{V}_i \qquad (32)$$

mesuré à partir de l'origine du système de coordonnées utilisées.

Il est parfois pratique d'exprimer le moment cinétique en termes de mouvement du centre de masse.

Comme le montre la figure 2, nous pouvons exprimer chaque vecteur de position sous la forme

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{\bar{r}}_i \qquad (33)$$

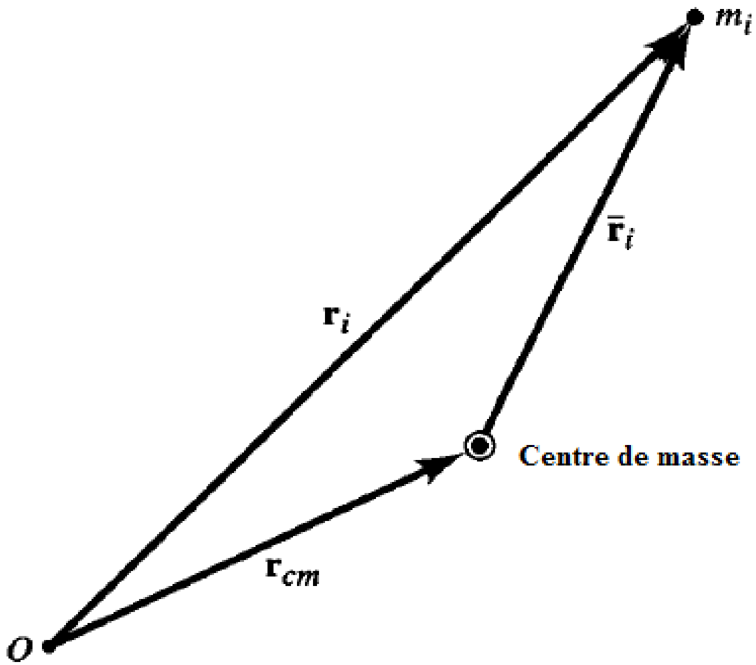


Figure 2

où $\vec{\bar{r}}_i$ est la position de la particule ***i*** par rapport au centre de masse.

En prenant la dérivée par rapport à *t*, nous avons

$$\overrightarrow{V_i} = \overrightarrow{V}_{cm} + \overrightarrow{\overrightarrow{V_i}} \qquad (34)$$

$\overrightarrow{V}_{cm}$ est la vitesse du centre de masse

$\overrightarrow{\overrightarrow{V_i}}$ est la vitesse de la particule ***i*** par rapport au centre de masse.
L'expression pour $\overrightarrow{L}$ peut donc s'écrire

$$\overrightarrow{L} = \sum_i^N \overrightarrow{r_i} \wedge m_i \overrightarrow{V_i}$$

$$\overrightarrow{L} = \sum_i^N \left(\overrightarrow{r}_{cm} + \overrightarrow{\overrightarrow{r_i}}\right) \wedge m_i \left(\overrightarrow{V}_{cm} + \overrightarrow{\overrightarrow{V_i}}\right)$$

$$\overrightarrow{L} = \sum_i^N \left(\overrightarrow{r}_{cm} \wedge m_i \overrightarrow{V}_{cm}\right) + \sum_i^N \left(\overrightarrow{r}_{cm} \wedge m_i \overrightarrow{\overrightarrow{V_i}}\right) + \sum_i^N \left(\overrightarrow{\overrightarrow{r_i}} \wedge m_i \overrightarrow{V}_{cm}\right) + \sum_i^N \left(\overrightarrow{\overrightarrow{r_i}} \wedge m_i \overrightarrow{\overrightarrow{V_i}}\right)$$

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r}_{cm} \wedge \sum_i^N (m_i) \overrightarrow{V}_{cm} + \overrightarrow{r}_{cm} \wedge \sum_i^N \left(m_i \overrightarrow{\overrightarrow{V_i}}\right) + \sum_i^N \left(m_i \overrightarrow{\overrightarrow{r_i}}\right) \wedge \overrightarrow{V}_{cm} + \sum_i^N \left(\overrightarrow{\overrightarrow{r_i}} \wedge m_i \overrightarrow{\overrightarrow{V_i}}\right) \qquad (35)$$

Maintenant, à partir de l'équation (33), nous avons

$$\sum_{i}^{N} m_i \vec{\overline{r}}_i = \sum_{i}^{N} m_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_{cm} \right) = \sum_{i}^{N} m_i \vec{r}_i - M \vec{r}_{cm} = 0 \qquad (36)$$

De même, nous obtenons

$$\sum_{i}^{N} m_i \vec{\overline{V}}_i = \sum_{i}^{N} m_i \left(\vec{V}_i - \vec{V}_{cm} \right) = \sum_{i}^{N} m_i \vec{V}_i - M \vec{V}_{cm} = 0 \qquad (37)$$

par différenciation par rapport à *t*. (Ces deux équations indiquent simplement que la position et la vitesse du centre de masse, par rapport au centre de masse, sont toutes deux nulles.) Par conséquent, les deuxième et troisième sommations dans l'expansion de (équation 35) disparaissent, et nous pouvons écrire

$$\vec{L} = \vec{r}_{cm} \wedge \sum_{i}^{N} (m_i) \vec{V}_{cm} + \sum_{i}^{N} \left(\vec{\overline{r}}_i \wedge m_i \vec{\overline{V}}_i \right)$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r}_{cm} \wedge M \vec{V}_{cm} + \sum_{i}^{N} \vec{\overline{r}}_i \wedge m_i \vec{\overline{V}}_i} \qquad (38)$$

exprimer le moment cinétique d'un système en termes d'une partie "orbitale" (mouvement du centre de masse) et d'une partie "spin" (mouvement autour du centre de masse).

L'énergie cinétique totale

L'énergie cinétique totale E_C d'un système de particules est donnée par la somme des énergies individuelles, à savoir,

$$E_C = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \left(\vec{V}_i . \vec{V}_i\right) \qquad (39)$$

Comme précédemment, nous pouvons exprimer les vitesses relatives au centre de masse en donnant

$$E_C = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \left(\overrightarrow{V_{cm}} + \vec{\bar{V}}_i\right) . \left(\overrightarrow{V_{cm}} + \vec{\bar{V}}_i\right)$$

$$E_C = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \; V_{cm}^2 + \sum_i m_i \left(\overrightarrow{V_{cm}} . \vec{\bar{V}}_i\right) + \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \; \bar{V}_i^{\,2}$$

$$E_C = \tfrac{1}{2} V_{cm}^2 \sum_i m_i \; + V_{cm} \sum_i m_i \bar{V} + \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \; \bar{V}_i^{\,2} \qquad (40)$$

Puisque la deuxième sommation disparaît, nous pouvons exprimer l'énergie cinétique comme suit:

$$E_C = \tfrac{1}{2} M V_{cm}^2 + \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \ \bar{V}_i^2 \qquad (41)$$

Le premier terme est l'énergie cinétique de translation de l'ensemble du système, et le second est l'énergie cinétique du mouvement par rapport au centre de masse.

La séparation du moment cinétique et de l'énergie cinétique en une partie centre de masse et une partie relative au centre de masse trouve des applications importantes en physique atomique et moléculaire et en astrophysique.

Exemple 14

a) Trouver l'énergie cinétique du système de l'exemple **13** .

b) Trouver la valeur de $\frac{MV_{cm}^2}{2}$

c) Trouver le moment angulaire a partir de l'origine.

Degrés de liberté

Le nombre de coordonnées indépendantes qu'il faut se donner pour déterminer de façon univoque la position d'un système (d'une ou plusieurs particules) est appelé nombre de ***degrés de liberté*** du système.

Exemple 15

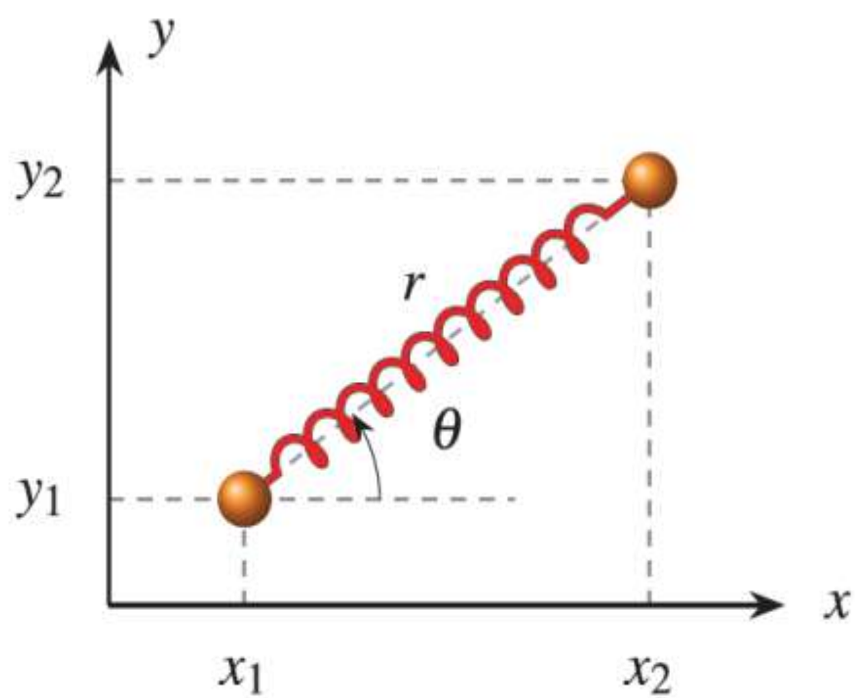
Une particule se déplaçant librement dans l'espace nécessite 3 coordonnées, par exemple (x, y, z) , pour spécifier sa position. Ainsi, le nombre de degrés de liberté est de **3**.

Exemple 16

Prenons deux particules ponctuelles, 1 et 2 dans un repère à deux dimensions, ce système compte $2 \times 2 = 4$ degrés de liberté

On peut choisir les 4 coordonnées x_1, y_1, x_2, y_2

comme on peut aussi choisir x_1, y_1, θ et r.



Exemple 17

Déterminez le nombre de degrés de liberté dans chacun des cas suivants:

(a) cinq particules se déplaçant librement dans un plan;

(b) cinq particules se déplaçant librement dans l'espace;

(c) deux particules reliées par une tige rigide se déplaçant librement dans un plan.