Chapitre 2 : Formalisme de Lagrange

« … Les méthodes que j'y explique ne nécessitent ni constructions, ni arguments géométriques ou mécaniques, mais seulement les opérations algébriques inhérentes à un processus régulier et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse verront avec joie la mécanique en devenir une nouvelle branche et me seront reconnaissants d'avoir étendu son champ. »

-Joseph Louis de Lagrange, Avertissement for Mechanique Analytique, 1788-.

Une autre manière de regarder la mécanique

- A l'époque de Lagrange donc au $18^{\text{ème}}$ siècle, la seule façon de traiter la Dynamique d'un système se réduisait à l'équation de Newton . Le problème est qu'il s'agit d'une **équation vectorielle** et pour la traiter on à Besoin donc **d'un repère** avec **des axes** dans lequel **ont projette** les **positions** et les **vitesses**, dans le cas d'un système complexe, l'écriture de la deuxième loi de Newton devient **trop compliquée** pour être utilisable.
- En réfléchissant à la mécanique céleste, **Lagrange** a eu l'idée de décrire directement des relations sur des fonctions de grandeurs qui caractérisent le Système céleste, ces grandeurs **sont indépendantes**, leur nombre correspond au **degré de liberté du système** et les fonctions qu'il faut utiliser sont homogènes à **une énergie**.

- En généralisant ses calculs de mécanique céleste, Lagrange s'aperçoit que si on peut trouver une fonction qui ne dépend que des coordonnées généralisées et telle que la dérivée partielle par rapport à la coordonnée généralisé correspond à la force subi par la particule, alors on peut remplacer l'équation de Newton par l'équation dite équation de **Lagrange**.

Coordonnées généralisés

Afin de souligner l'invariance de forme selon les types de coordonnées utilisées, nous parlerons de coordonnées généralisées.

Soit un système composé de *N* particules dans l'espace à trois dimensions :

S'il n'y a pas d'interaction entre les particules chaque particule à trois degrés de libertés dans l'espace, ce système à en total **3*N*** degrés de libertés:

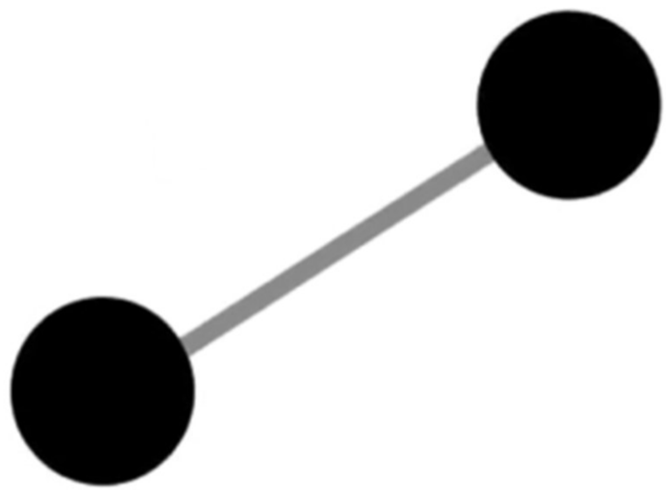
$$\ell = 3\mathrm{N}$$

S'il y a des contraintes entre les particules, ces contraintes vont abaissés le nombre de degrés de libertés du système,

$$1 \leq \ell \leq 3N$$

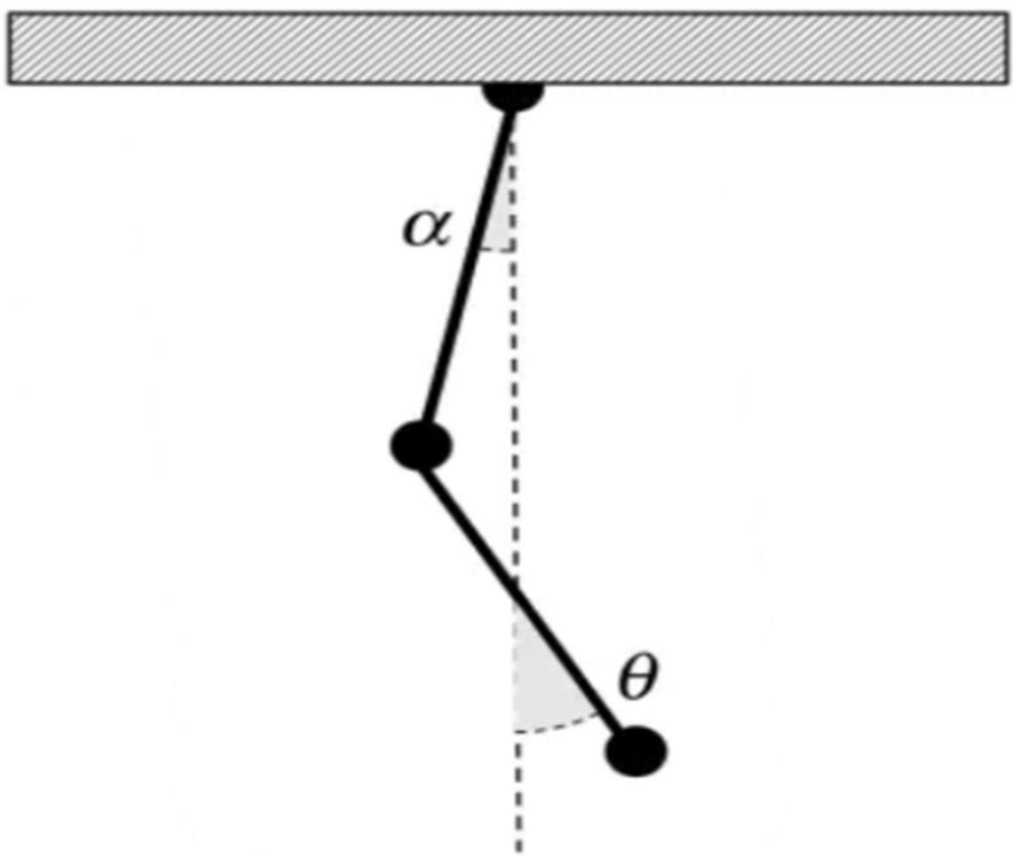
Exemple 1

Deux particules liées par une tige de masse négligeable ne possèdent que **5** degrés de libertés correspondant au trois degrés de libertés de translations et deux degrés de libertés de rotation.



Exemple 2

Un double pendule ne possède que deux degrés de libertés correspondant aux angles que fait chaque tige par rapport à la direction de référence



Si le système n'admet que ℓ degrés de libertés, cela veut dire qu'on peut introduire un jeu de coordonnées indépendantes entre elles que nous appellerons coordonnées généralisées $q_i, \ldots q_\ell$, tel que la position de chaque particule ne dépend que de ces ℓ coordonnées généralisées.

Ayons définir les coordonnées généralisées, on peut aussi définir leurs vitesses généralisées $\dot{q}_i, \ldots \dot{q}_\ell$

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}, \ldots, \dot{q}_\ell = \frac{dq_\ell}{dt}$$

Formalisme de la mécanique analytique :
Le formalisme de Lagrange :

En mécanique en se pose souvent la question de la trajectoire d'une particule,

c'est-à-dire la position x en fonction du temps t.

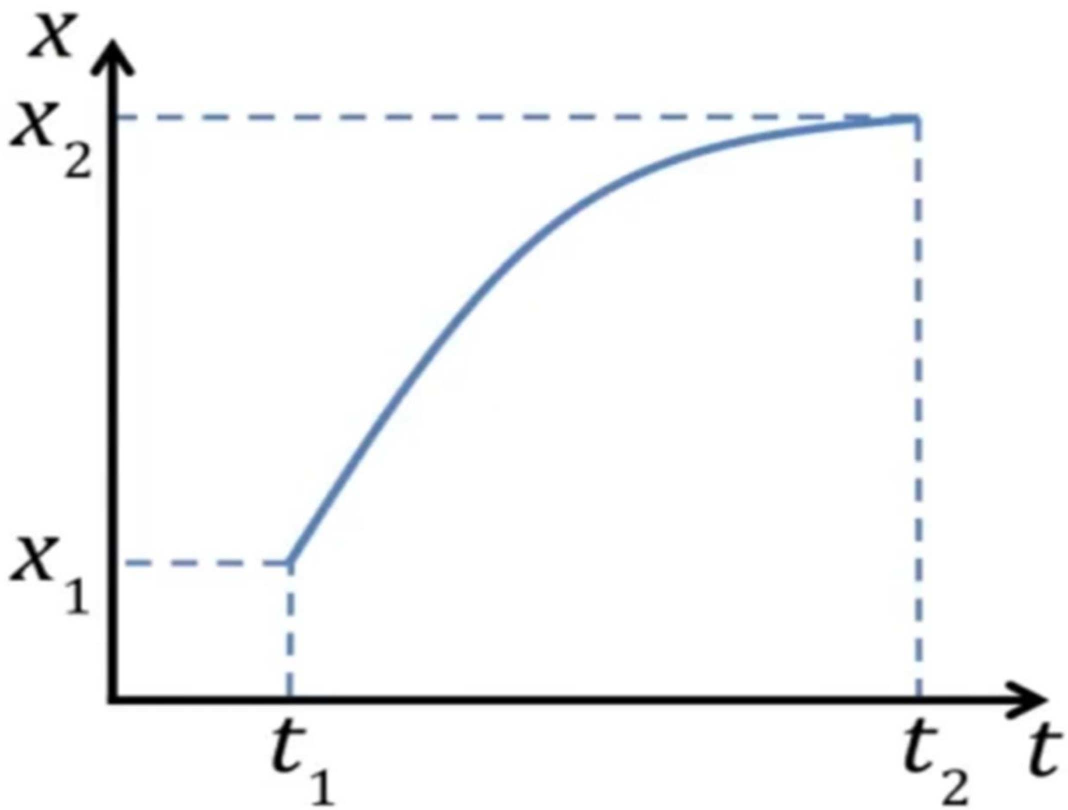


Figure 2.1 : Trajectoire d'une particule dans un espace unidimensionnel.

Nous savons bien que la vitesse est donnée par la dérivée de x par rapport à t

$$V(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \qquad (1)$$

L'évolution temporelle de la particule est donnée par la deuxième loi de Newton

$$m\frac{dV(t)}{dt} = F \qquad (2)$$

Mais la question est : Est ce qu'il y a une autre façon éventuellement plus simple pour décrire l'équation (2) ?

En étudiant la mécanique céleste, Lagrange a eu l'idée que s'il existe une fonction qui ne dépond uniquement que de la position telle que sa dérivée par rapport à la position égale à la force totale agissant sur la particule

$$m\frac{dV(t)}{dt} = F = -\frac{dE_p(x)}{dx} \qquad (3)$$

Nous pouvons réécrire le terme gauche de l'équation (3) en faisons appelle à l'énergie cinétique

$$m\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(mV) = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dV}\left(\frac{1}{2}mV^2\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{dE_c(V)}{dV}\right] \qquad (4)$$

Energie cinétique : $E_c(V) = \frac{1}{2}mV^2$

Ainsi grâce à l'hypothèse que la force dérive d'une énergie potentielle, l'équation fondamentale de la dynamique peut se réécrire sous cette forme

$$-\frac{dE_p(x)}{dx} = F = m\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dE_c(V)}{dV}\right] \Rightarrow \boldsymbol{\frac{d}{dt}\left[\frac{dE_c(V)}{dV}\right] + \frac{dE_p(x)}{dx} = 0} \qquad (5)$$

Ou on a un terme lié uniquement à l'énergie cinétique et un autre lié uniquement à l'énergie potentiel.

Vu que l'énergie cinétique ne dépend pas explicitement de la position x et que l'énergie potentiel ne dépend pas explicitement de la vitesse V

$$\frac{dE_c(V)}{dx} = 0 \ , \qquad \frac{dE_p(x)}{dV} = 0$$

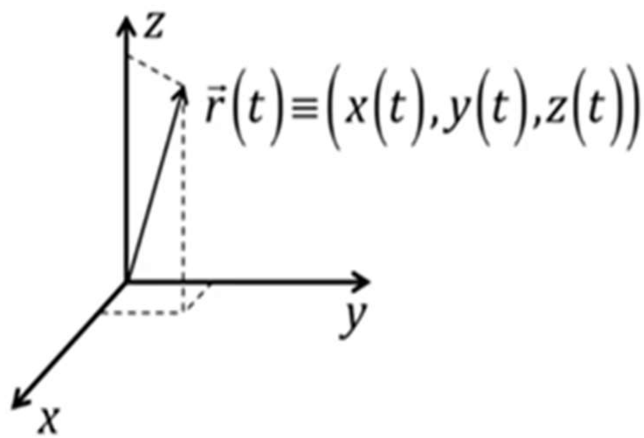
nous pouvons introduire une fonction que nous appellera « Lagrangien »

$$L = E_c - E_p \qquad (6)$$

Avec cette définition l'équation (5) peut se réécrire sous une forme plus compacte

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{dE_c}{dx} = 0\ , \qquad \dfrac{dE_p}{dV} = 0 \\ L = E_c - E_p \\ \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{dE_c(V)}{dV}\right] + \dfrac{d}{dx}E_p(x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{dL}{dV}\right] - \dfrac{dL}{dx} = 0}_{EQUATION\ DE\ LAGRANGE} \qquad (7)$$

Nous pouvons généralisée l'équation de Lagrange au cas de trois dimensions



Lagraigien :

$$L = E_c(V_x, V_y, V_z) - E_p(x, y, z)$$

Ainsi pour chaque coordonnée cartésienne on aura une équation

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{dL}{dV_x}\right] - \dfrac{dL}{dx} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{dL}{dV_y}\right] - \dfrac{dL}{dy} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{dL}{dV_z}\right] - \dfrac{dL}{dz} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Equation de Lagrange et coordonnées généralisées

Comme le système ne possède que ℓ degrés de libertés, chaque coordonnée pourra s'écrire en fonction des ℓ coordonnées généralisées.

$$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_1}(q_i, \dots q_\ell)$$

$$\vdots$$

$$\overrightarrow{r_N} = \overrightarrow{r_N}(q_i, \dots q_\ell)$$

Chaque degré de liberté est bien indépendant des autres, donc nous pouvons écrire que

$$\forall i, j = 1, \dots, \ell;\ \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j \end{cases}$$

On peut écrire la dynamique du système tout simplement on écrivant une équation de Lagrange pour chaque degré de liberté, c'est-à-dire on écrivant une équation de Lagrange pour chaque couple$(q_k, \dot{q_k})$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \text{avec } k \in [1, \ell]$$

$$Lagrangien : L = E_c - E_p$$

Les équations de Lagrange rend les équations du système dynamique plus simple.

Example 3

En utilisant le formalisme de Lagrange, trouvez les équations différentielles du mouvement d'un projectile dans un champ gravitationnel uniforme sans résistance de l'air.

Example 4

Trouver la fonction de Lagrange d'un pendule double oscillant dans un plan, placés dans un champ de pesanteur uniforme (accélération de la pesanteur: g).

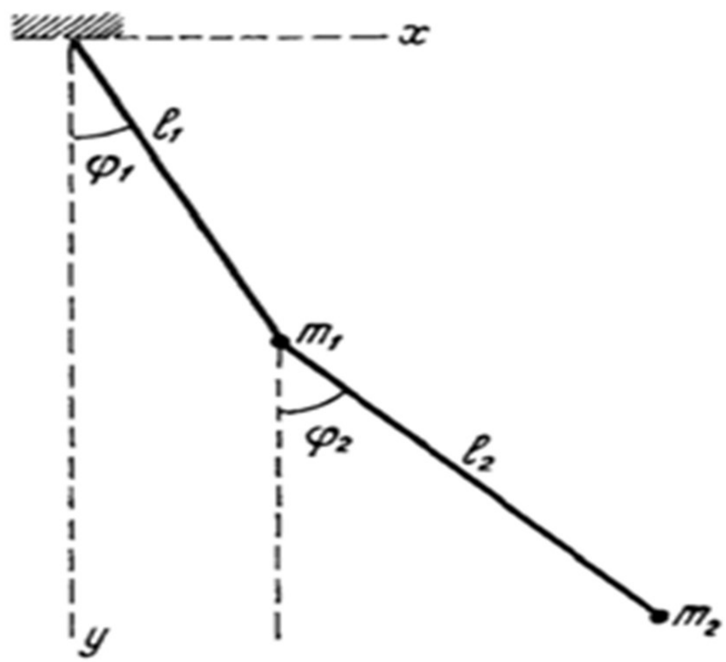


Fig. 1

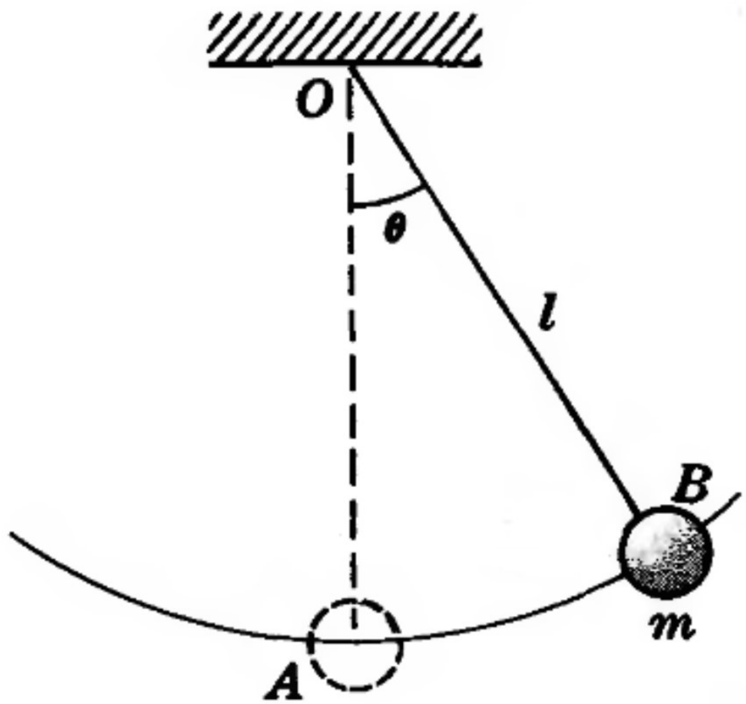
Example 5

Determine the motion equation of a simple pendulum of length $\boldsymbol{l}$ and mass $\boldsymbol{m}$ assuming small vibration and no resisting forces.

Example 6

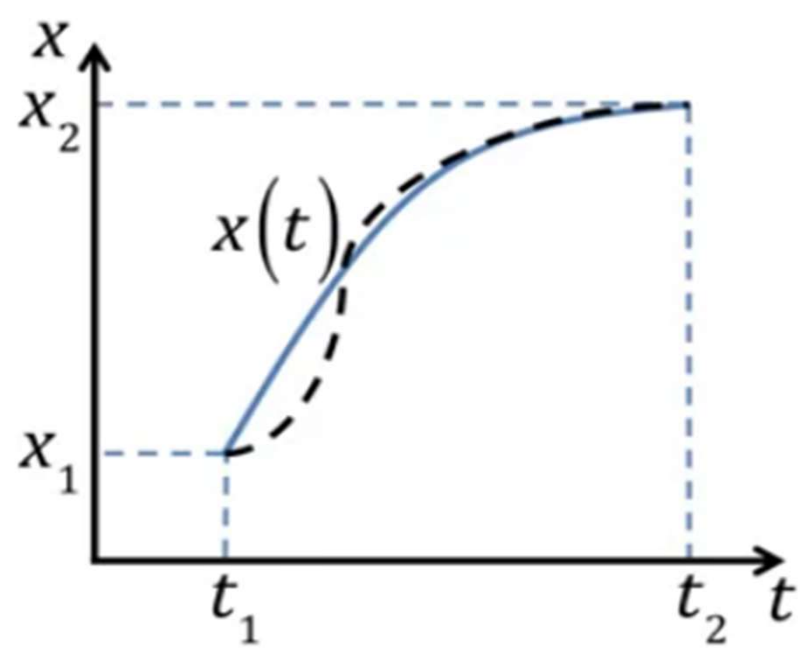
(a) Set up the Lagrangian for a simple pendulum

(b) obtain an equation describing its motion.



Principe de moindre Action

Revenons au cas simple d'une particule de masse constante à une dimension soumise à une énergie potentielE_p, ici nous avons indiqué la trajectoire réellement suivie par la particule que nous avons indiquée par la fonction $x(t)$ (figure 2.1), par contre, il y a plein de trajectoires possible qui relie les points initiaux et finaux aux instants initiaux et finaux respectivement.



Quelle est la trajectoire réellement suivie par la particule ?

La trajectoire réellement suivie par la particule peut être déduite par un principe variationnel, dite “***le principe de moindre action***”.

Lagrange introduit le concept d'action : **c'est l'intégrale sous la variable temporelle de lagrangien entre l'instant initial $\boldsymbol{t_1}$ et l'instant final $\boldsymbol{t_2}$**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t)dt \qquad (9)$$

Le principe de moindre action stipule que la trajectoire réellement suivie par la particule est celle qui rond extrémale l'action c'est-à-dire $\boldsymbol{\delta S = 0}$

On considère un système décrit par ℓ coordonnées généralisées quand indiquera par q_i où $i = 1,2, \dots, \ell$ et sont Lagrangien L:

$$L = L(q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell, t) \qquad (10)$$

L'action S est définit par cette équation :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \qquad (11)$$

Afin de faciliter la compréhension du problème, nous allons considérer dans un premier temps qu'il n'y a qu'un seul degré de liberté

$$\ell = 1 \qquad (12)$$

pour que l'action soit extrémale il faut que sa différentielle soit égale à zéro

$$\delta S_1 = 0 \qquad (13)$$

En sachant que le Lagrangien dépend des variables q et $\dot{q}$

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dot{q}_1) dt \qquad (14)$$

Alors

$$\delta S_1 = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_1, \dot{q}_1) dt$$

La différentielle ordinaire d'une fonction *f (x, y)*:

Si nous calculons la différentielle ordinaire d'une fonction ***f (x, y)***, c'est-à-dire ***df***, nous obtiendrons

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \qquad (16)$$

Si les variations ***dx*** et ***dy*** sont indépendantes. Le même type d'opération s'applique au calcul variationel.

Nous allons écrire la différentielle de Lagrangien comme une somme de la différentielle selon q_1 et de la différentielle selon $\dot{q}_1$

$$\delta L(q_1, \dot{q}_1) = \frac{\partial L}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 \qquad (17)$$

En utilisant la définition de l'action de l'expression (15), nous pouvons réécrire ainsi la différentielle totale :

$$\delta S_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 \right) dt \qquad (18)$$

Remarquons d'abord que :

$$\delta \dot{q}_1 = \frac{d}{dt} \delta q_1 \qquad (19)$$

En peut ainsi transformer à nouveau l'expression de δS_1 ce qui donne :

$$\delta S_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \frac{d}{dt} (\delta q_1) \right) dt \qquad (20)$$

Pour que $\delta S_1 = 0$, il faut que cette intégrale soit nulle :

$$\delta S_1 = 0 \Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \frac{d}{dt} (\delta q_1) \right) dt = 0 \qquad (21)$$

Le second terme de l'intégrale $\left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \frac{d}{dt}(\delta q_1)\, dt\right)$ est intégrable par partie, c'est-à-dire :

$$\int_{t_1}^{t_2} U\mathcal{V}'dt = U\mathcal{V} - \int_{t_1}^{t_2} U'\mathcal{V}dt \qquad (22)$$

On pose :

$$U = \delta q_1 \Longrightarrow U' = \frac{d}{dt}(\delta q_1)$$

$$\mathcal{V} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \Longrightarrow \mathcal{V}' = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}$$

Alors

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\frac{d}{dt}(\delta q_1)\, dt = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta q_1\right)_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)(\delta q_1)\right)dt \qquad (23)$$

D'autre part, en parle du principe que le point de départ $q_1(t_1)$ et le point d'arrivé $q_1(t_2)$ sont parfaitement connus, donc, il n'y a pas d'incertitude sur les positions à ces deux instant, ce qui nous permet d'écrire :

$$\delta q_1(t_1) = \delta q_2(t_2) = 0 \qquad (24)$$

Alors :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\frac{d}{dt}(\delta q_1)\, dt = \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta q_1\right)_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)(\delta q_1)\right) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\frac{d}{dt}(\delta q_1)\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)(\delta q_1)\right) dt \qquad (25)$$

L'insertion de l'expression (25) dans l'expression de (21) donne :

$$\delta S_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) \right) \delta q_1 dt \qquad (26)$$

Ont regardons cette expression on remarque que le terme à intégrer correspond aux équations de Lagrange

$$\delta S_1 = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) \right)}_{Equation\ de\ Lagrange} \delta q_1 dt \qquad (27)$$

Donc, si le mouvement de la particule satisfait l'équation de Lagrange alors l'intégrale est nulle :

$$\left(\frac{dL}{dq_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}_1}\right)\right) = 0 \Rightarrow \delta S_1 = 0 \qquad (28)$$

Si on considère maintenant un nombre de degré de liberté supérieur à 1

$$\ell > 1 \qquad (29)$$

On peut suivre à nouveau les mêmes étapes, à travers le Lagrangien, l'action sera en fonction des coordonnées et de vitesses généralisés:

$$S(q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_\ell, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell, t)dt \qquad (30)$$

En conséquence, la différentielle sera la somme des différentielles de l'action correspondante pour chaque degré de liberté

$$\delta S = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^{\ell} \delta S_i \qquad (31)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) \right) dt \qquad (32)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i)\right)dt=\sum_{i=1}^{\ell}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\right)dt \tag{33}$$

Les points aux instants initiaux et finaux est ont connu avec certitude

$$[\delta q_1(t_1),\delta q_2(t_1),\dots,\delta q_\ell(t_1)]=[\delta q_1(t_2),\delta q_2(t_2),\dots,\delta q_\ell(t_2)]=0 \tag{34}$$

L'intégration par partie donne à nouveau deux termes dont le premier vaut zéro :

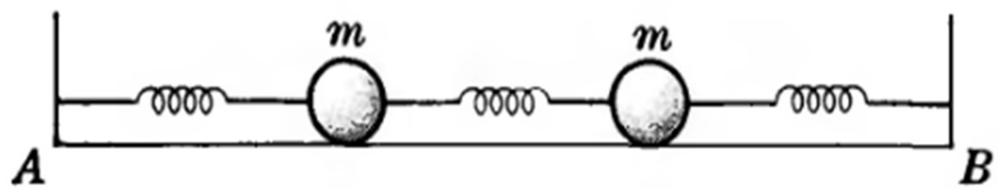
$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i)\right)dt=\sum_{i=1}^{\ell}\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2}}_{=0}-\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\right)dt \tag{35}$$

L'action s'écrira donc ainsi :

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{\ell}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)}_{Equation\ de\ Lagrange}\delta q_i dt=0 \tag{36}$$

Example 7

1) Deux masses égales ***m*** sont reliées par des ressorts ayant une constante de raideur égale κ, comme le montre la figure en bas, de sorte que les masses sont libres de glisser sur une table ***AB*** sans frottement. Les murs en ***A*** et ***B*** auxquels les extrémités des ressorts sont fixées. Mettre en place les équations différentielles du mouvement des masses en utilisant la deuxième loi de Newton.



2) En utilisant le formalisme de Lagrange, établir les équations différentielles du mouvement du même système.

Example 7

Considérons une particule de masse m se déplaçant dans un plan sous l'action d'une force attractive $\left(\frac{\mu m}{r^2}\right)$dirigée vers l'origine des coordonnées polaires r, θ.

En utilisant le formalisme de Lagrange, déterminer les équations de mouvement.