Chapitre 03 : FORMALISME DE HAMILTON

Le formalisme hamiltonien

- Lagrange avait réussi à décrire les équations pour le mouvement de la lune et des planètes sous forme d'une équation du premier ordre connue sous le nom d'équations planétaires, qui sont en principe plus facile à résoudre par rapport aux équations de Lagrange qui sont-elles du deuxième ordre.

- Lagrange voulait donc élargir cette idée et réécrire en générale les équations de Lagrange que nous avons vu dans le formalisme lagrangien sous forme d'équation du premier ordre.

Formalisme Hamiltonien

- Pour transformé une équation du **deuxième** ordre en deux équation d'ordre **un**, il suffit d'introduire la dérivé première comme nouvelle inconnue.
- Nous avons vues que le formalisme lagrangien est basé sur une description du système par les variables q et $\dot{q}$, ou autrement dit, par les coordonnées et les vitesses généralisés.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \;;\quad \forall k = 1, \dots, \ell \qquad (1)$$

Les « ℓ » équations de Lagrange sont de équations du deuxième ordre en « t » qui ne sont pas forcément facile à résoudre, il est donc plus convenable de transformer ce système de « ℓ » équations du deuxième ordre en « t » en un système de deux « ℓ » équation du premier ordre en « t».

Pour faire cela, Lagrange a introduit des nouvelles quantités qu'il appelle impulsion p_k définie comme :

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad (2)$$

avec cette nouvelle définition les équations de Lagrange s'écrivent plus simplement ainsi :

$$\frac{d}{dt}(p_k) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Leftrightarrow \frac{dp_k}{dt} = \dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (3)$$

Dans ce nouveau formalisme la description du système se fait par les variables q et p, donc par les coordonnées généralisés et par les impulsions.

Comme nous l'avons vues, le lagrangien est une fonction des variables q et $\dot{q}$

$$L(q_1, \dots q_\ell, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_\ell)$$

La différentielle de lagrangien s'écrit donc ainsi :

$$dL = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \qquad (4)$$

Où on rappelle que la somme se fait sur les « ℓ » degrés de libertés du système, dans cette différentielle nous voyons apparaître ces deux dérivés

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \dot{p}_k \ \text{ et } \ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$$

En prenant en compte ces égalités, nous pouvons réécrire ainsi la différentielle de lagrangien

$$dL = \sum_{k=1}^{\ell} \dot{p}_k dq_k + \sum_{k=1}^{\ell} p_k d\dot{q}_k \qquad (5)$$

Dans cette expression nous pouvons écrire le deuxième terme à droite d'une façons plus commode.

Ecrivons la différentielle de la somme des p_k fois $\dot{q}_k$

$$d\left(\sum_{k=1}^{\ell} p_k \dot{q}_k\right) = \sum_{k=1}^{\ell} p_k d\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k dp_k$$

$$\sum_{k=1}^{\ell} p_k d\dot{q}_k = d\left(\sum_{k=1}^{\ell} p_k \dot{q}_k\right) - \sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k dp_k \qquad (6)$$

Réinjectons l'équation (6) dans l'équation (5), nous obtiendrons :

$$dL = \sum_{k=1}^{\ell} \dot{p}_k dq_k + d\left(\sum_{k=1}^{\ell} p_k \dot{q}_k\right) - \sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k dp_k \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k dp_k - \sum_{k=1}^{\ell} \dot{p}_k dq_k = d\left(\sum_{k=1}^{\ell} p_k \dot{q}_k\right) - dL \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k dp_k - \sum_{k=1}^{\ell} \dot{p}_k dq_k = d\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{\ell} p_k \dot{q}_k - L}_{H}\right) \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k dp_k - \sum_{k=1}^{\ell} \dot{p}_k dq_k = dH \tag{10}$$

$$dH = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k dp_k - \sum_{k=1}^{\ell} \dot{p}_k dq_k \\ \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k \end{cases} \qquad (11)$$

Donc

$$\forall k = 1, \ldots \ell \quad \begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases} \qquad EQUATION\ DE\ HAMILTON \quad (12)$$

Le Hamiltonien d'une particule à une dimension

Dans ce cas la coordonnée généralisé $\boldsymbol{q}$ et la coordonnée cartésienne $\boldsymbol{x}$ coïncide, donc en peut traiter le problème avec la coordonnée x.

Tout d'abord, écrivant le Lagrangien, qui dans le cas de force conservative tout simplement égale à la différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - E_p(x) \qquad (13)$$

Ensuite en calcul l'impulsion en utilisant la définition

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad (14)$$

En voient que l'impulsion coïncide avec la quantité de mouvement.

Nous pouvons maintenant calculer le Hamiltonien toujours en utilisant la définition, le calcul du Hamiltonien se fait sans difficulté :

$$H = P\dot{x} - L = m\dot{x}^2 - L$$

$$H = m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x)$$

$$H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x) \qquad (15)$$

L' Hamiltonien représente ici l'énergie total de la particule.

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m}\right) m\dot{x}^2 + E_p(x)$$

$$H = \frac{m^2\dot{x}^2}{2m} + E_p(x)$$

$$H = \frac{P^2}{2m} + E_p(x) \qquad (16)$$

Remarque: la description du système se fait ici par les variables position et impulsion et non pas par les variables position et vitesse comme dans le cas du formalisme Lagrangien, cette remarque est fondamentale pour passer au formalisme de la physique quantique.

Le Hamiltonien de *N* particules

Si nous regardons maintenant le cas de N particules indépendantes, et sans contraintes en 3 dimension, soumises à une énergie potentielle $E_p(q_1, \dots, q_{3N})$. En peut répéter le même calcul sans difficulté :

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{q}_i^2 - E_p(q_1, \dots, q_{3N}) \qquad (17)$$

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i \;\; ; \quad \forall\, i = 1, \dots, 3N \qquad (18)$$

$$H = \sum_{i=1}^{3N} P_i\, \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^{3N} \frac{{P_i}^2}{2m_i} + E_p(q_1, \dots, q_{3N}) \qquad (19)$$

Nous avons maintenant trois formalismes pour décrire la dynamique d'un système:

- Les équations de Newton,
- Les équations de Lagrange,
- Les équations de Hamilton,

les trois sont équivalent, mais selon le problème à traiter, il peut être plus facile d'utilisé l'une de ces trois approche, par contre le formalisme qui permet une compréhension plus profonde de la dynamique d'un système est certainement le formalisme Hamiltonien. Par exemple, dans le formalisme Hamiltonien, on voit clairement que c'est l'énergie totale du système qui gouverne sont évolution dans le temps. Cette remarque restera valable dans la physique quantique aussi.

Example 1

Obtain Hamilton's equations of motion for a one-dimensional harmonic oscillator.

Example 2

Find the Hamiltonian equations of motion for a particle in a central field.