الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة تيسمسيلت
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم علوم التسيير

دروس عبر الخط في مقياس أساسيات بحوث العمليات

موجة لطلبة السنة الثانية ليسانس تخصص علوم مالية و محاسبية

من إعداد الدكتورة مبطوش العلجة

السنة الجامعية 2024/2025
السداسي الأول

البطاقة الفنية للمقياس

إسم ولقب الأستاذ	مبطوش العلجة
الرتبة العلمية	أستاذ في العلوم التجارية
التخصص	العلوم المالية و المحاسبية
المؤسسة	جامعة تيسمسيلت
الفئة المستهدفة بالمقياس	السنة الثانية ليسانس تخصص علوم مالية و محاسبية
المقياس	أساسيات بحوث العمليات
الوحدة	وحدة التعليم المنهجية
الرصيد	4
المعامل	2
الموسم الجامعي	2024/2025

الأهداف العامة للمقرر

تكمن أهمية تدريس مقياس أساسيات بحوث العمليات في هذا المستوى في تعريف طلبة تخصص العلوم المالية و المحاسبية بمختلف المفاهيم والأطر النظرية الخاصة بالبرمجة الخطية على مستوى المؤسسات، بحيث يتم تزويد الطالب ببعض التقنيات الإرشادية التي تستخدمها بحوث العمليات (البرمجة الخطية) لحل المشكلات بالمؤسسة، التمكن من تحقيق أهداف المؤسسة باستخدام نماذج البرمجة الخطية المختلفة.

المعارف المسبقة المطلوبة

حتى يتسنى للطالب دراسة مقرر مقياس أساسيات بحوث العمليات يجب أن يكون للطالب بعض المكتسبات القبلية وخاصة في: مقرر التحكم في الرياضيات خاصة الجبر الخطي والمصفوفات.

محاور مقياس أساسيات بحوث العمليات

مقدمة

الدرس الأول: مقدمة في بحوث العمليات

الدرس الثاني: البرمجة الخطيـــة

الدرس الثالث: صياغة نمـــاذج البرمجة الخطية

الدرس الرابع: حل نماذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانيــة

الدرس الخامس: الطريقة الجبرية لحل نماذج البرمجة الخطية

الدرس السادس: حل نماذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس

الدرس السابع: النموذج الثنـائي و تحليل الحساسية

الدرس الثامن: مسائل النقل (الصياغة)

الدرس التاسع: حل مسائل النقل

الدرس العاشر: تمثيل مسائل النقل بنظرية الشبكة

تمارين عملية حول أساسيات بحوث العمليات

خاتمة

المصادر والمراجع

مقدمة

إن عملية اتخاذ القرار ليست بالأمر الهين كونها تحتاج من الشخص القائم عليها بذل جهد أكبر و بحث عميق لصياغة المشكلة بشكل دقيق، و تحديد المعلومات المطلوبة، و تحليلها و تقييم مختلف البدائل الممكنة و من ثم تقييم النتائج المحصل عليها، و بالتالي التوصل إلى القرار الأنسب و الذي يمكِّن المؤسسة من انجاز أعمالها بأعلى درجات الكفاءة.

من هنا جاءت أساسيات بحوث العمليات كتطبيق علمي للطرق الرياضية و الإحصائية في حل مختلف المشاكل الإدارية و الاقتصادية، التي تواجه متخذ القرار في أداء مهامه، و القابلة للتكميم بالدرجة الأولى.

وقد حاولنا من خلال تقديم هذه الدروس تبسيط الأفكار و المعلومات للطلبة للاستفادة وتعزيز قدراتهم العملية من خلال التطبيقات و التمارين التي شملتها هاته الدروس.

الدرس الأول: مقدمة في بحوث العمليات

1- نبذة تاريخية عن بحوث العمليات:

نشأت بحوث العمليات خلال الحرب العالمية الثانية، واستخدمت للمرة الأول أثناء الحرب العالمية الثانية في عام 1940م في المملكة المتحدة، حيث عهدت الإدارة العسكرية في بريطانيا إلى فريق من العلماء والباحثين وذوي اختصاصات مختلفة مهمّة دراسة العمليات المرتبطة بالدفاع الجوي والبري ودراسة المشاكل الإستراتيجية والتعرف على أفضل استخدام ممكن للمعدات الحربية.

ويعود الاستخدام الأول لأساليب بحوث العمليات إلى الحرب العالمية الثانية عندما لجأ الأمريكيون والإنجليز إلى الأساليب الكمية في حل المشاكل التي واجهتهم حينئذٍ. وقد تم ذلك عن طريق تكوين فريق من العلماء المتخصصين في الرياضيات، والهندسة، والسلوكيات ... الخ، بحيث يقوم الفريق بدراسة المشكلة واقتراح الحلول المناسبة مستخدماً الأسلوب العلمي في ذلك. ومن ضمن القرارات التي نوقشت واتخذت بهذه الطريقة تحديد الأهداف العسكرية، وتوقيت الضربات الجوية، وتحديد أفضل الوسائل وأكثرها أمناً للإنزال العسكري، ونقل المؤن والأفراد. وقد حفز نجا ح استخدام هذه الأساليب خلال الحرب في إتخاذ القرارات العسكرية.

2- مفهوم بحوث العمليات:

يمكن تعريف مصطلح بحوث العمليات (research operations) بأنه مصطلح يطلق على عملية صنع القرار المبنية على المنهج العلمي مع الاعتماد بصفة رئيسية على أساليب التحليل الكمي في حل المشكلة الإدارية بهدف الوصول إلى البديل الأمثل " "Optimumفي حدود الإمكانيات المتاحة وذلك بناء على بيانات تفصيلية ودراسة دقيقة للمخرجات، وتقدير المخاطر لكل البدائل المتاحة.

ومفهوم بحوث العمليات بلغة أخرى: هو علم التمثيل الرياضي لمشاكل عملية إتخاذ القرار وإيجاد طرق حل لهذه النماذج الرياضية.

أما التعريف الذي قدمته جمعية بحوث العمليات الأمريكية فهو: تهتم بحوث العمليات بالاختيار العلمي لأفضل تصميم وتشغيل لأنظمة الإنسان – الآلة – وفي ظروف تتطلب تخصيصاً للموارد المحدودة.

من التعريف الأول يتضح أن علم بحوث العمليات يعتمد على استخدام النماذج الرياضية كقالب تصاغ فيه المشكلة الإدارية؛ إلا أن نجاح تكوين النموذج وتطبيقه يعتمد على قدرة متخذ القرار، حيث يتوقف نجاح عملية جمع البيانات للنموذج والتحقق من صحة تمثيله للواقع وتطبيقه على القدرة على إيجاد خطوط اتصال جيدة بين هؤلاء الذين لديهم المعلومات وبين من سيقوم بالتطبيق وفريق بحوث العمليات.

وأساليب بحوث العمليات تطبق في مختلف المجالات، مثل إدارة التجارة والصناعة، والمستشفيات، والقطاع العام ... الخ. وتعتمد بحوث العمليات على استخدام المنهج العلمي وذلك بهدف إيجاد الحل الأمثل للمشكلة محل الدراسة، ومن أجل الوصول للهدف لابد من تحديد مقياس كافي يضع في اعتباره أهداف المنظمة ككل. حيث يستخدم المقياس لمقارنة البدائل المتاحة.

3- **عملية صنع القرار وبحوث العمليات:**

تتضمن عملية صنع القرار الخطوات الآتية :

1. تعريف المشكلة.
2. تحديد البدائل.
3. اختيار مقياس للمقارنة بين البدائل.
4. تقييم البدائل.
5. اختيار أحد البدائل.

ومن خلال الخطوة الرابعة (تقييم البدائل) نجد أن عملية التقييم قد تأخذ اتجاهين أساسيين: تحليل نوعي " "Qualitativeأو تحليل كمي ""Quantitative، ويقوم الاتجاه الأول على خبرة المدير، ويتضمن ذلك قدرته البديهية، فإذا كانت المشكلة سبق وأن حدثت، أو كانت سهلة نسبياً، فكثيراً ما يستخدم المدير فطنته وخبرته في معالجتها، ولكن إذا لم يكن لديه الخبرة اللازمة وكانت المشكلة صعبة ومعقدة، فلا بد إذا من الاتجاه الكمي في تحليل المشكلة ومن ثم اختيار البديل الأفضل.

1-3 أسباب الحاجة للأساليب الكمية

هناك حاجة لأساليب بحوث العمليات حينما نلاحظ أي من العلامات الآتية على المنظمة، مما يجعل من المفيد الاستعانة بأخصائي بحوث العمليات، ولعل أهمها:

- وجود مشكلة معقدة جداً، حيث تتداخل عوامل عدة وتعجز النظم المتوفرة عن إيجاد حل مناسب. حينما يتطلب القرار تبريراً كمياً.

- الحاجة إلى تقييم أو تقليل المخاطرة، كما هو الحال عند البدء في مشروع جديد حيث لا توجد خبرة مسبقة عن كيفية إتخاذ قرار منطقي.
- تكرار المشكلة، وعدم قدرة المنشأة على الاستفادة من البيانات لحل المشكلة.
- لتحسين مستوى الأداء، وتقليل المخاطرة، وتحقيق الميزة التنافسية للمنظمة.

2-3 أهمية استخدام نماذج بحوث العمليات:

- أهم النماذج المستخدمة هي النماذج الرياضية والمحاكاة الآلية، ويتم بناء النماذج الرياضية في بحوث العمليات من خلال كتابة المشكلة الإدارية في شكل معادلات تضم في تكوينها مجموعة من المتغيرات التي يمكن التحكم فيها، ومجموعة أخرى من المتغيرات التي لا تستطيع المنظمة التحكم فيها.
- فمثلاً نجد أن القرار الإداري الخاص بتغيير أسعار منتجات الشركة لا يقف عند حد تغيير الأسعار بل لابد من دراسة تأثير هذا القرار على الإنتاج، والمبيعات، والطلب ... الخ. وعلى هذا فإن النماذج الرياضية لا تقف عند حد استعراض هذه المتغيرات، ولكن أيضاً تحليل العلاقة والتفاعل بينها، وذلك من خلال سلسلة من المعادلات الرياضية.
- ويمكن القول بأن النماذج الرياضية تساعد في التعامل مع المشكلة ككل (أي بصفة شاملة).
- تساعد المحلل على رؤية المشكلة بوضوح وتحديد ما هي البيانات ذات العلاقة في توضيح العلاقة بين السبب والأثر، والتي قد لا تكون واضحة بدون تجسيم رياضي.
- وبالرغم من هذه المزايا إلا أن التمثيل الرياضي لا يخلو من العيوب، فالنموذج تمثيل بسيط لموقف واقعي، وكثيراً ما نضطر لعمل فرضيات وتقديرات وتخمينات ونحن في مرحلة تمثيل المشكلة رياضياً.

4- خطوات التحليل الكمي:

- تشمل خطوات التحليل الكمي الآتي:
- **4-1 تحديد المشكلة:** تعتبر خطوة تحديد المشكلة من أهم الخطوات، ويتوقف عليها نجاح أو فشل المنهج الكمي في إتخاذ القرار. حيث يتطلب الأمر الكثير من الخيال، والإبداع، والعمل الجماعي من أجل صياغة المشكلة ووضعها في إطار يمكن تناوله كمياً. وغالباً ما تكون المشكلة:
- وضع جديد لم يتخذ بشأنه قرار من قبل.
- مجال لم يحقق نجاحاً كما هو متوقع له.
- في حالة إعادة تقييم للسياسة الحالية لمعرفة إمكانية تحسينها.
- **4-2 تكوين النموذج الرياضي :** صياغة المشكلة في نموذج رياضي هي أهم ما يميز علم بحوث العمليات عن غيره من العلوم القائمة على استخدام الأساليب الكمية، ويتم تكوين النموذج الرياضي عن طريق ترجمة التعبيرات اللغوية إلى علاقة رياضية. يشمل تكوين النموذج الرياضي:
- **المدخلات:** التي لا تستطيع المنظمة التحكم فيها، مثل سعر السلعة أو تكلفة الإنتاج، وكذلك المدخلات التي تستطيع المنظمة التحكم فيها، مثل عدد الوحدات المنتجة، أو كمية البضاعة ونعرفها بالمجاهيل والتي يجب تحديدها لحل النموذج.
- **المحددات:** وهذه تمثل القيود الفنية والاقتصادية وغيرها والتي تحد من قيمة الحلول الممكنة.

دالة الهدف : (Function Objective)

- وتحدد مقياس الكفاية للإدارة، وتمثله بدالة رياضية للمتغيرات المتحكم فيها ونحصل على الحل الأمثل حينما تحقق قيمة المتغيرات المتحكم فيها أحسن قيمة للدالة في حدود القيود المفروضة.
- جمع البيانات: وهي مرحلة تجميع البيانات عن المتغيرات غير المتحكم فيها.
- 3-4 حل النموذج : ويعني ذلك محاولة معرفة قيم المتغيرات المتحكم فيها والتي تعطي أفضل حل ممكن بدون تجاوز القيود المفروضة على المشكلة.
- 4-4 كتابة التقرير: يجب أن يكتب بلغة بسيطة، موضحاً فيه الحل وطريقة تنفيذه.

5- شروط تطبيق بحوث العمليات

- يمكن أن تطبق بحوث العمليات في مختلف المؤسسات الإنتاجية والخدمية كافة، بشرط توفر الآتي:
- محدودية الموارد التي تستعملها المؤسسة في عملياتها الانتاجية أو التجارية.
- تعدد البدائل التي يمكن من خلالها استغلال الموارد بشكل أمثل، واختيار البديل الأفضل وفق معايير أعلى فائدة أو منفعة أو أقل خسارة أو تكلفة.

6- استخدامات بحوث العمليات:

- يوجد العديد من المجالات التطبيقية لبحوث العمليات في الكثير من النواحي الاقتصادية والزراعية والصناعة والتجارية :
- **6-1 الادارة الصناعية :** حين تتعامل المصانع مع الإنتاج فهناك مشكلتان تظهران وهما إما تعظيم الأرباح أو تقليل التكلفة ولحل هاتان المشكلتان نستخدم الأساليب الكمية في الحل ويتم تطبيق بحوث العمليات أيضاً في تحديد كمية الإنتاج وزيادة الطاقة الإنتاجية والسيطرة على المخزون.
- **6-2 الإدارة العسكرية:** تستخدم بحوث العمليات في هذه الناحية بحيث تحدد أفضل الطرق للنقل بأقل الخسائر الممكنة وأيضاً وضع التكتيك الدفاعي الذي يعتمد على أسلوب البرمجة الخطية.
- **6-3 الإدارة الزراعية:** تستخدم في التوزيع الأمثل للمياه على الأراضي الزراعية ومساعدة البلدان التي تقل فيها الموارد المائية في السيطرة علي المخزون المائي وتوزيعه بشكل أفضل على السكان والزراعة والصناعة.
- **6-4 إدارة الخدمات:** تستخدم بحوث العمليات في النواحي الخدمية مثل المستشفيات ووسائل النقل وبعض الدوائر الحكومية في صفوف الانتظار، وأيضاً في تنظيم وصول القطارات والطائرات.

أسئلة للمراجعة وللبحث وتعزيز القدرات

- فيما تكمن أهمية بحوث العمليات ؟
- ما هي دالة الهدف؟
- قدم تعريفا للقيود؟
- ما هي شروط تطبيق بحوث العمليات؟
- ما هي خطوات التحليل الكمي؟
- ما هي أهمية استخدام نماذج بحوث العمليات ؟
- عدد خطوات عملية صنع القرار وبحوث العمليات ؟

الدرس الثاني: البرمجة الخطيـــة

لقد أصبح تبني الإدارة العلمية أو ما يسمى بالتحليل الكمي أو بحوث العمليات ضرورة حتمية لأي مؤسسة مهما كان شكلها و طابعها، خصوصا في ظل المنافسة الشرسة، محدودية الموارد و تعدد البدائل، و هذا ما استحدث وظيفة بحوث العمليات بالمؤسسات في الدول المتقدمة على غرار الوظائف الأخرى.
فعملية اتخاذ القرار تكون منصبة على اختيار حل أمثل لمشكلة ما، يكون أساسها التفسير العلمي للمشكلة بدءً بتحديد المسألة و جمع المعلومات اللازمة عنها، تحديد البدائل، تقييمها و من ثم اختيار أمثلها، و أخيرا اتخاذ القرارات الرشيدة بأقل تكلفة و أكبر ربح ممكن.

1.تعريف البرمجة الخطية : LINEAR PROGRAMING

البرمجة الخطية أو البرمجة الرياضية :

هي أسلوب تحليلي كمي تم استخدامه في العلوم الطبيعية والهندسية قبل استخدامه في العلوم الاجتماعية والإدارية ، وهي من النماذج المؤكدة وليست من النماذج الاحتمالية. وهي أحد فروع وأنواع البرمجة الرياضية.

2. الإطار العام للمشاكل التي تعالجها البرمجة الخطية:

REQUIREMENTS OF A LINEAR PROGRAMING

هناك عدة مكونات / عناصر لأي مشكلة تعالجها البرمجة الخطية ، وهي كما يلي:

1- دالة الهدف. OBJECTIVE FUNCTION

2-متغيرات القرار. DECISION VARIABLES

3.قيود CONSTRAIN

4.شرط عدم السلبية NONNEGATIVETY

3- شروط استخدام البرمجة الخطية:

لاستخدام البرمجة الخطية ينبغي توفر شروط معين، من أهمها:

3-1- تحديد المشكلة تحديدا رياضيا دقيقا بمتغيرات القرار، التي تكون معاملاتها على شكل ثوابت و معلومة مسبقاً، هذا كله لإيجاد دالة الهدف التي يمكنها قياس فعالية المؤسسة من خلال دراسة (الربح، كمية الإنتاج، التكاليف ... إلخ)، و الهدف من البرمجة الخطية هو تعظيم أو تقليل دالة الهدف حسب حاجة النموذج.

3-2- لتحقيق غرض أو هدف البرمجة الخطية في دالة الهدف، يجب مراعاة الموارد المتاحة للمؤسسة أي عدم تجاوزها، و تظهر هذه الخاصية على شكل مجموعة قيود في صورة علاقات رياضية خطية بمتغيرات القرار (معاملاتها عبارة عن ثوابت محددة مسبقا)، و علاقة كل منها على شكل متباينة غالبا (أو مساواة) للتأكيد على عدم تجاوز الكميات المتاحة من الموارد.

3-3- تتعلق كل من العلاقات الرياضية الخطية و متغيرات القرار في المسألة المدروسة ببعضها البعض بشكل وثيق، حيث أن أي تغيير من زيادة أو نقصان لأحد هذه المتغيرات يؤثر على مجموع المتغيرات من خلال تغيير بعضها أو كلها.

الدرس الثالث: صياغة نمـــاذج البرمجة الخطية

1-مراحل صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

إن بناء النموذج الرياضي لأي مشكلة لابد أن يمر بخطوات تتمثل فيما يلي:

1-1- صياغة دالة الهدف: يسعى متخذ القرار إلى تحقيق هدف معين كتعظيم الأرباح مثلا، و تكون دالة الهدف قد اتخذت الشكل العام التالي: $Max\ Z = c1\ x1 + c2\ x2 + \dots + cn\ xn$

حيث أن كلمة Max هي اختصار لكلمة Maximisation أي التعظيم، و ترمز كل من x1، x2 ...xn إلى عدد الوحدات المنتجة من المنتجات 1، 2، ... n على التوالي، أو إلى ما يجب أن تقتنيه المؤسسة من آلات أو وسائل نقل أو غير ذلك من متغيرات المشكلة، أما كل من c1، c2، ... cn فهي ترمز إلى الربح المحقق بالوحدة الواحدة من المنتجات 1، 2، ... n على التوالي، و يرمز Z إلى الربح الكلي.

8-2- صياغة القيود: هي محددات المشكلة التي لا يمكن تجاوزها و التي تؤدي إلى تحقيق الهدف، فقد تكون القيود ممثلة بالمواد الأولية أو العدد المطلوب من القوى العاملة أو ساعات العمل أو غيرها. كما تفرض هذه القيود قيوداً على ما يمكن تخصيصه من الموارد المتاحة لتحقيق هدف معين، مثل: ما يمكن إنتاجه من المنتوج أو ما يمكن بيعه أو ما يمكن نقله من مصنع معين أو الكميات الدنيا و القصوى الواجب تسليمها إلى مستودع معين أو إلى غير ذلك.

و قد تأخذ القيود الشكل العام التالي: $A \geq a1\ x1 + a2\ x2 + \dots + an\ xn$

حيث أن:

a1، a2، ... an هي الكمية التي تحتاجها المؤسسة من المادة الخام مثلا لإنتاج وحدة واحدة من المنتجات 1، 2، ... n على التوالي. و تمثل A الكمية المتوفرة من المادة الخام لدى المؤسسة، فهي تبين الحد الأعلى الذي يمكن استخدامه من المادة الخام لإنجاز أعمال تلك المؤسسة.

رابعا : فروض البرمجة الخطية LP ASSUMPTIONS

تقوم البرمجة الخطية على عدة فروض أساسية :

1. التأكد : CERTAINTY

2. الخطية : LINEARITY

3. التناسبية : PROPORTIONALITY

4. الإضافية أو قابلية الجمع: ADDITIVITY

5. قابلية القسمة أو الكسرية DIVISIBILTY OR FRACTIONALITY

مثال تطبيقي:

مثال01-01:

تقوم مؤسسة ما بإنتاج الكراسي و الطاولات و بيعها للمدارس، حيث أن إنتاج كرسي واحد يتطلب 3 صفائح خشبية و 4 قطع من الحديد، و بعد بيعه يحقق ربحا قدره 250 دج، أما إنتاج الطاولة الواحدة فيتطلب 6 صفائح خشبية و 7 قطع من الحديد، و بعد بيعها تحقق ربحا قدره 430 دج، حيث أن المؤسسة لا تتوفر إلا على 180 قطعة خشبية و 320 قطعة من الحديد.

فما هي الكميات المثلى الواجب إنتاجها من كلا المنتجين، و التي تحقق لمؤسسة أكبر ربح ممكن؟

لدينا:

الجدول رقم 01: تمثيل معطيات المثال 01-01

	الخشب	الحديد	الربح
الكراسي	3	4	250
الطاولات	6	7	430
الكمية المتاحة	180	320	

المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال

1- تحديد متغيرات القرار:

x1: تمثل كمية الكراسي التي سوف تنتجها المؤسسة و تحقق لها أكبر ربح؛

x2: تمثل كمية الطاولات التي سوف تنتجها المؤسسة و تحقق لها أعظم ربح.

2- صياغة دالة الهدف: إن ربح المؤسسة ناتج عن إنتاج و بيع كل من الكراسي و الطاولات و عليه:

2-1- إنتاج الكراسي:

إنتاج 1 كرسي يحقق ربحا قدره (1 × 250)

إنتاج 2 كرسي يحقق ربحا قدره (2 × 250)

إنتاج x1 كرسي يحقق ربحا قدره ((250 × x1

2-2- إنتاج الطاولات:

إنتاج 1 طاولة يحقق ربحا قدره (1 × 430)

إنتاج 2 طاولة يحقق ربحا قدره (2 × 430)

إنتاج x1 طاولة يحقق ربحا قدره ((430 × x2

و عليه و بما أن هذه المؤسسة تسعى إلى تعظيم أرباحها فإنه يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

$$Max\ Z = 250\ x1 + 430\ x2$$

-3 صياغة القيود الوظيفية: فعلى المؤسسة أن تحترم ما تتوفر عليه من مواد أولية عند تعظيمها لأرباحها.

3-1- المادة الأولية الأولى (الخشب): تمثل كمية الخشب الكلية مجموع الخشب المستخدم في إنتاج الكراسي ((3 × x1و الخشب المستخدم لإنتاج الطاولات ((6 × x2و الذي يجب أن لا يتجاوز الكمية المتاحة و المقدرة بـــ 180 قطعة. و هذا يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$3\ x1 + 6\ x2 \leq 180$$

-3-2المادة الأولية الثانية (الحديد): تمثل كمية الحديد الكلية مجموع الحديد المستخدم في إنتاج الكراسي 4x1و الحديد المستخدم لإنتاج الطاولات 2x 7و الذي يجب أن لا يتجاوز الكمية المتاحة و المقدرة بـــ 320 قطعة. و هذا يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$4\ x1 + 7\ x2 \leq 320$$

-4قيود عدم سلبية المتغيرات: حيث أن إنتاج كل من الكراسي و الطاولات لا يمكن أن يكون بكميات سالبة، فإما يكون موجبا أو معدوما، و هو ما يُعبر عنه بالصياغة التالية:

$$x1 \geq 0 \qquad x2 \geq 0$$

و عليه و بتجميع الصيغ الرياضية المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

دالة الهدف Max Z= 250 x1+430 x2

تحت القيود:

قيد الخشب $x1 + 6\,x2 \leq 180$ 3

قيد الحديد $x1 + 7\,x2 \leq 320$ 4

قيد عدم سلبية المتغيرة الأولى $x1 \geq 0$

قيد عدم سلبية المتغيرة الثانية $x2 \geq 0$

تمرين للمراجعة والبحث وتعزيز القدرات

- **التمرين :**
- مؤسسة للتجارة تنتج 3 أنواع من المنتجات هي: الكراسي، الطاولات، الخزائن، عملية الإنتاج تستدعي مرور هذه المنتجات بثلاث ورشات:
- الورشة 01: يتم على مستوى هذه الورشة صناعة الهياكل، طاقة العمل القصوى بها تقدر بـــ 130 ساعة؛
- الورشة 02: يتم على مستوى هذه الورشة تركيب الملحقات، عدد ساعات العمل المتاح لهذه الورشة يقدر بـــ 90 ساعة؛
- الورشة 03: يتم على مستوى هذه الورشة الإنهاء، طاقة العمل القصوى بها تقدر بـــ 80 ساعة.
- إنتاج الكرسي الواحد يتطلب 14 سا في الورشة 01، و 14 سا في الورشة 02، و 10 سا في الورشة 03، و إنتاج طاولة واحدة يتطلب 18 سا في الورشة 01، و 20سا في الورشة 02، و 5سا في الورشة 03، و إنتاج خزانة واحدة يتطلب 25سا في الورشة 01، و 20سا في الورشة 02، و 10سا في الورشة 03. الكرسي الواحد يتطلب صفيحة خشبية واحدة في حين أن الطاولة تتطلب صفيحتين، أما بالنسبة للخزانة الواحدة فتتطلب 4 صفائح خشبية، علما أن المتاح من الصفائح الخشبية على مستوى المؤسسة يقدر بـــ 125 صفيحة، سعر بيع: الكرسي الواحد 450 دج، الطاولة الواحدة 1000 دج و الخزانة الواحدة 1500 دج، علما أن تكلفة: الكرسي الواحد 400 دج، الطاولة الواحدة 900 دج، الخزانة الواحدة 1000 دج.
- **المطلوب:**
- 1- صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يسمح بتحديد الكميات الواجب إنتاجها من الكراسي، الطاولات و الخزائن، و الذي يسمح للمؤسسة بتحقيق أعظم ربح ممكن.
- 2- صياغة النموذج بافتراض أن هذه المنتجات الثلاث تخزن في مخزن طاقته الاستيعابية تقدر ب 500 وحدة و بافتراض أن الحجم التخزيني للمنتجات الثلاث متساوي.

الدرس الرابع: حل نماذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانيــة

حل نماذج البرمجة الخطية: نعني بحل البرنامج الخطي، إيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود، سواء كانت دالة الهدف في حالة تعظيم أوفي حالة تدنية. و عليه فإن الحل يمثل كل قيم متغيرات القرار التي تحقق القيود الوظيفية.

و يمكن التمييز بين ثلاثة أنواع من الحلول:

1-1- الحل المقبول :(Solution réalisable)هو كل قيم متغيرات القرار التي تحقق القيود الوظيفية و قيود عدم سلبية المتغيرات؛

2-1- الحل غير المقبول :(Solution non réalisable)هو كل قيم متغيرات القرار التي تحقق القيود الوظيفية و لا تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات.

3-1- الحل الأمثل : (Solution Optimale)نسمي حلاًّ أمثلاً كل حل مقبول و الذي يعطي لدالة الهدف أمثل قيم، أي أعظم قيمة في حالة Max، و أدنى قيمة في حالة Min.

2- الطريقة البيانية: تستخدم طريقة الرسم البياني لإيجاد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية، و تعتبر من أسهل الطرق و التي تُستعمل فقط في حالة وجود متغيرين و الاستغناء عن ثلاثة متغيرات لأن تمثيلها يتم في الفضاء و يصعب تحليله.

3- خطوات الحل باستعمال الطريقة البيانية: تتمثل خطوات الحل وفق الطريقة البيانية فيما يلي:

3-1- الخطوة الأولى: يتم رسم القيود على أنها معادلات، و ذلك كما يلي:

بالنسبة للقيد الأول يتم افتراض أن أحد المتغيرين معدوم و بالتالي يمكن حساب المتغير الآخر، و نفس الشيء يتم افتراض أن المتغير الثاني معدوم ليتم حساب المتغير الأول، و بهذا تكون لدينا نقطتان يتم من خلالهما رسم مستقيم القيد الأول. و بنفس الطريقة يتم رسم مستقيمات باقي القيود و بتقاطعها يتم الحصول على منطقة الحلول المقبولة (الممكنة)، و يجب ملاحظة اتجاه المتراجحات أو القيود.

حيث أنه:

-إذا كانت العلاقة في القيد $\leq$ فإن اتجاه الحل سوف يكون باتجاه كبر المتغيرات؛

-إذا كانت العلاقة في القيد $\geq$ فإن اتجاه الحل سوف يكون باتجاه صغر المتغيرات؛

-إذا كانت العلاقة في القيد $=$ فإن اتجاه الحل سوف يقع على الخط؛

3-2- الخطوة الثانية: إيجاد قيمة دالة الهدف عند كل نقطة زاوية و نختار أفضلها في كلتا الحالتين، فإذا كانت دالة الهدف تعظيم ((Maxيتم اختيار أكبر قيمة، و في حالة كون دالة الهدف تدنية ((Minيتم اختيار أصغر قيمة و من ثم تحديد الحل الأمثل.

مثال 02-01:

$$\text{Max } Z = 1000\,x1 + 1200\,x2$$

Soumise aux contraintes

$$10\,x1 + 5\,x2 \leq 200$$

$$2\,x1 + 3\,x2 \leq 60$$

$$x1 \leq 34$$

$$x2 \leq 14$$

$$x1 \geq 0$$

$$x2 \geq 0$$

1-التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد و متجانس.

1-1- القيد الأول: $10\,x1 + 5\,x2 \leq 200$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $10\,x1 + 5\,x2 = 200$

نضع:

$x1 = 0 \Rightarrow 5\,x2 = 200 \Rightarrow x2 = 40$ A (0 , 40)

نضع:

$x2 = 0 \Rightarrow 10\,x1 = 200 \Rightarrow x1 = 20$ B (20 , 0)

-2- القيد الثاني: $3x_1 + 2x_2 \leq 60$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $3x_1 + 2x_2 = 60$

نضع:

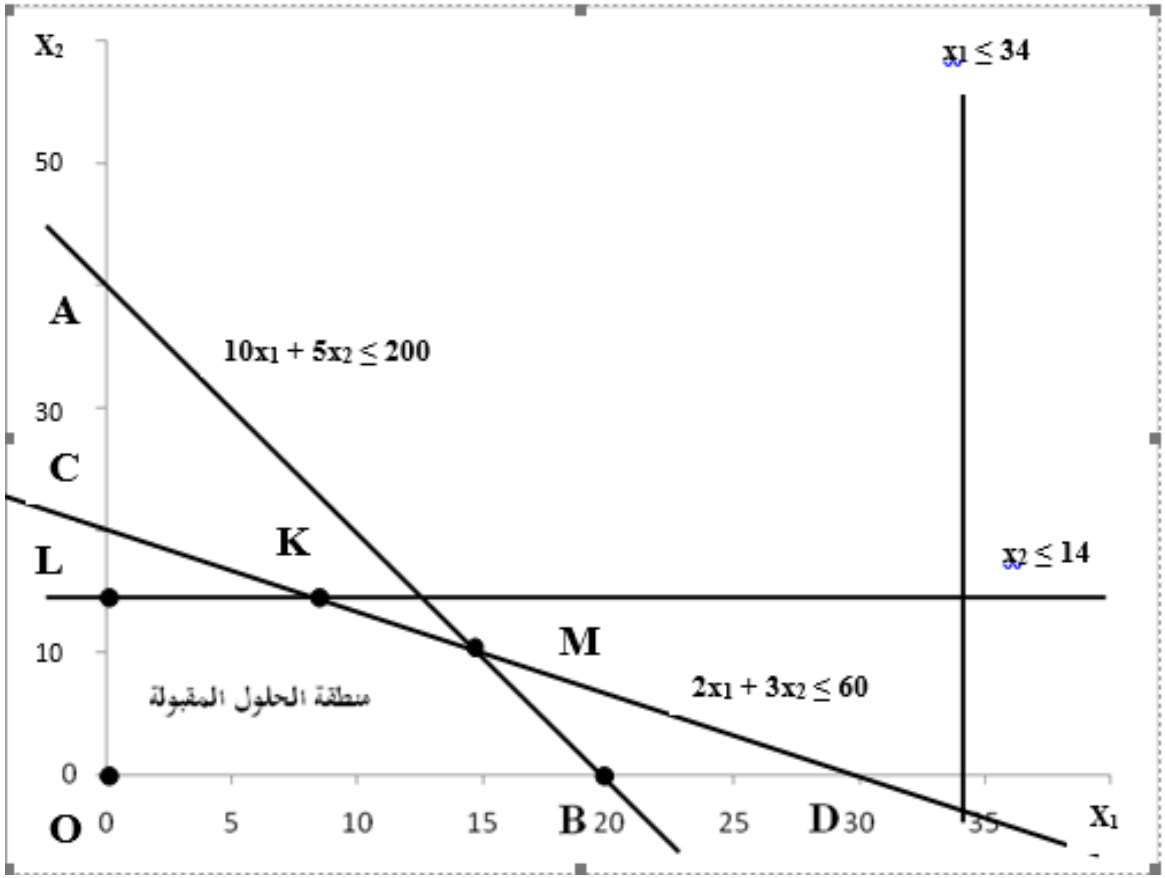
$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x_2 = 60 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 20 \qquad C(0, 20)$

نضع:

$x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = 60 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 30 \qquad D(30, 0)$

هذا إضافة إلى تحويل القيدين الأخيرين إلى معادلات: $x_1 = 34$و $x_2 = 14$، ثم تمثيلها جميعا على معلم متعامد و متجانس.

الشكل رقم 01: التمثيل البياني لقيود المثال 02-01



عند رسم القيود نلاحظ أنها تقسم المستوي إلى قسمين: قسم يقع على يمين المستقيم و آخر يقع على يساره.

فلو أخذنا على سبيل المثال القيد الأول $10\ x_1 + 5\ x_2 \leq 200$ نلاحظ أنه يقسم المستوي إلى قسمين، أحدهما على يمين المستقيم و الآخر على يساره، و كلاهما يحتوي على عدد لانهائي من النقاط، فلو أخذنا أي نقطة من النقاط الواقعة على اليمين و عوضنا إحداثياتها في المتراجحة فإننا نلاحظ أنها لا تحقق القيد.

مثل: النقطة G(50,30) عند تعويضها في القيد أعلاه نحصل على: 10(50) + 5(30) > 200 فهي لا تحقق القيد، و عليه فإن جميع النقاط الواقعة يمين (أعلى) المستقيم لا تحقق القيد و بالتالي فهي ليست حلا للمتراجحة.

أما لو أخذت النقاط الواقعة على يسار المستقيم و تم تعويضها في القيد فنلاحظ أنها تحقق القيد أعلاه.

مثل: النقطة (N(10,10 و التي تقع تحت المستقيم)، عند تعويضها في القيد أعلاه نحصل على 10(10) + 5(10) < 200، و النقطة (P(12,16 و التي تقع على المستقيم) عند تعويضها في القيد أعلاه

نحصل على 10(12) + 5(16) = 200 فكلاهما يحقق القيد، و عليه فإن جميع النقاط الواقعة يسار (تحت) القيد تحقق القيد، و بالتالي فهي حل للمتراجحة.

2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:

نسمي المنطقة OLKMB منطقة الحلول المقبولة، و هي تحتوي عدد لانهائي من النقاط، و التي تتوزع داخل المنطقة أو على حدودها، أو على النقاط الرأسية Points extrêmes): O, L, K, M, B.)

من أجل أي نقطة من منطقة الحلول المقبولة هناك قيمة لدالة الهدف Z، و ما يهمنا هو إيجاد النقطة التي تعطي لـــ Zأعظم (أمثل) قيمة، و هاته النقطة تتواجد على أحد رؤوس منطقة الحلول المقبولة، لذلك نضطر إلى إيجاد و حساب إحداثيات النقط الرأسية، ليتم تعويضها في دالة الهدف و من ثَم اختيار النقطة الرأسية التي تعطي لـــ Zالقيمة الأمثل.

- تحديد إحداثيات النقاط الرأسية و تقييم Z:

من الشكل أعلاه تتضح لنا إحداثيات النقاط:

$O\ (0\ ,\ 0) \Rightarrow Z = 1000\ (0) + 1200\ (0) \Rightarrow Z = 0$

$L\ (0\ ,\ 14) \Rightarrow Z = 1000\ (0) + 1200\ (14) \Rightarrow Z = 16800$

$B\ (20\ ,\ 0) \Rightarrow Z = 1000\ (20) + 1200\ (0) \Rightarrow Z = 20000$

أما النقاط M و K فيتم حساب إحداثياتها جبريا.

بالنسبة للنقطة M فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $x2 = 60\ 2\ x1\ 3+$ و $x2 = 200\ 5+$
$x1\ 10$، و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

$x1 + 5x2 = 20010$

$2x1 + 3x2 = 60 \ldots\ldots\ldots \times (-5)$

بضرب المعادلة الثانية في (-5)، و جمع المعادلتين نحصل على:

$x1 + 5x2 + (-\ 10x1 - 5x2) = 200 - 30010$

$-\ 10x2 = 100 \Rightarrow x2 = 10$

بتعويض قيمة x2في إحدى المعادلتين (و لتكن المعادلة الثانية)، نحصل على:

$$x1 + 3(10) = 60 \Rightarrow 2x1 = 60 - 30 \Rightarrow x1 = 15$$

و منه:

$$M\ (15\ ,\ 10) \Rightarrow Z = 1000\ (15) + 1200\ (10) \Rightarrow Z = 27000$$

أما بالنسبة للنقطة Kفهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $x2 = 14$ و $x1\ 2 + 3x2 = 60$، و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

$$x2 = 14$$

$$2x1 + 3x2 = 60$$

بتعويض قيمة x2في المعادلة الثانية نحصل على:

$$x1 + 3(14) = 60 \Rightarrow 2x1 = 60 - 42 = 42 \Rightarrow x1 = 9$$

و منه:

$$K\ (9\ ,\ 14) \Rightarrow Z = 1000\ (9) + 1200\ (14) \Rightarrow Z = 25800$$

و عليه فإن الحل الأمثل هو النقطة: . $M\ (15\ ,\ 10)$

و بعد إيجاد الحل الأمثل للنموذج، يمكن أن نخلُص إلى أن البرنامج الإنتاجي الأمثل للمؤسسة هو كالتالي:

$x1 = 15$أي على المؤسسة إنتاج 15 وحدة من المنتج الأول؛

$x2 = 10$أي على المؤسسة إنتاج 10 وحدات من المنتج الثاني.

تمرين للمراجعة وللبحث وتعزيز القدرات

- ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:
- $Min\ Z = 3x1 + 3x2$

تحت القيود:

- $x1 + x2 \geq 9$
- $x1 - x2 \leq 9$
- $x1 + 3x2 \geq 17$
- $x1 \geq 3$
- $x2 \leq 10$
- $x1 \geq 0$
- $x2 \geq 0$

- المطلوب: حل النموذج بالطريقة البيانية

الدرس الخامس: الطريقة الجبرية لحل نماذج البرمجة الخطية

إن مجال استخدام هذه الطريقة أوسع من الطريقة البيانية، حيث تستخدم لحل المسائل متعددة المتغيرات، و تعد هذه الطرقة تمهيدا لفهم طريقة السمبلكس، و التي تفوق إمكانياتها الطريقتين: البيانية و الجبرية.

1- الشكل القانوني لنماذج البرمجة الخطية :يمكن القول أن نموذج البرمجة الخطية مكتوب على شكله النموذجي (القانوني)، إذا تحقق الشرطان:

أ- جميع القيود الوظيفية للنموذج تكون:

أقل أو تساوي في حالة نموذج التعظيم Max؛

أكبر أو تساوي في حالة نموذج التدنية .Min

ب- جميع متغيرات القرار تكون موجبة أو معدومة (.$xj \geq 0 : j=1.... n$)

وبناءً على ذلك يمكن التمييز بين 3 حالات:

-1- الحالة الأولى: إشارات القيود الوظيفية للنموذج (≤، =، ≥)

يمكن أن تحتوي نماذج البرمجة الخطية على قيود وظيفية بإشارات لا تتوافق و دالة الهدف، كأن يكون النموذج من نوع تعظيم ((Maxو قيوده الوظيفية بإشارات أكبر أو تساوي، و هي بذلك لا تحقق شرط الشكل النموذجي للنموذج، لذلك يجب تحويلها إلى إشارة أقل أو تساوي و ذلك بضرب طرفي القيد في (-1) لتحويل إشارتها، و العكس لنموذج التدنية، فإن كانت قيوده بإشارات أقل أو تساوي يتم ضرب طرفي المتراجحات في (-1) لتتحول بذلك إلى إشارات أكبر أو تساوي.

مثال 03-01:

أكتب نموذج البرمجة الخطية أدناه على الشكل القانوني:

$$\text{Max } Z = x1+2\,x2+3\,x3$$

Soumise aux contraintes

$$4x1+5\,x2+6\,x3 \geq 100$$

$$7\,x1+8\,x2+9\,x3 \leq 200$$

$$10\,x1+11\,x2+12x3 \geq 500$$

$$x1 \geq 0$$

$$x2 \geq 0$$

$$x3 \geq 0$$

نلاحظ أن القيدين الأول و الأخير لا يحققان شروط الشكل النموذجي للنموذج أعلاه، لذلك يتوجب كتابتهما وفق إشارة أقل أو تساوي و ذلك لأن النموذج من نوع تعظيم، و عليه يتم ضرب طرفي المتراجحة في (-1):

$x1+5\ x2+6\ x3 \geq 100 \ldots\ldots\ldots\ldots \times (-1) \quad \Rightarrow \quad -4x1\ -5\ x2\ -\ 6\ x3 \leq -4$

$10\ x1+11\ x2+\ 12x3 \geq 500 \ldots\ldots\ldots\ldots \times (-1) \Rightarrow \quad -10\ x1\ -\ 11\ x2\ -\ 12x3 \leq -500$

100 100

و عليه يصبح النموذج وفق الشكل القانوني كالتالي:

$$Max\ Z=\ x1+2\ x2+3\ x3$$

تحت القيود:

$$-4x1-5\ x2-6\ x3 \leq -100$$

$$7\ x1+8\ x2+9\ x3 \leq 200$$

$$-10\ x1-11\ x2-\ 12x3 \leq -500$$

$$x1 \geq 0$$

$$x2 \geq 0$$

$$x3 \geq 0$$

أما إن كان النموذج يحتوي على قيود بإشارات تساوي تماما، فذلك يعني أن القيد يمكن كتابته وفق متراجحتين، فإما أن يكون بإشارة أكبر أو يساوي أو أقل أو يساوي.

-2- الحالة الثانية: إشارات المتغيرات غير محددة ($x_j \in R$)

من المتفق عليه أن متغيرات نماذج البرمجة الخطية عموما تكون إما موجبة أو معدومة، إلا أنه في بعض مسائل البرمجة الخطية قد تأخذ متغيرات القرار قيما سالبة، و هذا ما يفسر اقتصاديا بانخفاض كمية الإنتاج مثلا، و هذا ما يعبر عنه رياضيا بالكتابة: $x_j \in R$، ذلك أن إشارة المتغيرات غيرة محددة.

ففي هذه الحالة يتوجب علينا كتابة كل متغيرة تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقة في صورة فرق متغيرتين موجبتين على مستوى القيود الوظيفية، و كذا على مستوى دالة الهدف، كما يلي:

$$x_j = x'_j - x''_j$$

$$x'_j \geq 0, \quad x''_j \geq 0$$

و نصبح نتعامل فرق المتغيرتين $x'_j - x''_j$ بدلا من x_j

فإذا كانت:

$x''_j \leq x'_j$ أي: $0 \leq x'_j - x''_j$ فإن: $x_j \geq 0$

$x''_j \geq x'_j$ أي: $0 \geq x'_j - x''_j$ فإن: $x_j \leq 0$

مثال 03-03:

أكتب نموذج البرمجة الخطية أدناه على الشكل القانوني:

$$Max\ Z = 2x1+3\ x2$$

تحت القيود :

$$x1+x2 \leq 5$$

$$2\ x1+x2 \leq 10$$

$$x1 \geq 0$$

$$x2 \in R$$

نلاحظ أن إشارات القيود لنموذج التعظيم أعلاه محققة، إضافة إلى قيود عدم السلبية، عدا المتغيرة x2و التي يجب علينا تعويضها بفرق متغيرتين موجبتين كما يلي:

$$Max\ Z = 2x1+3\ (x'2 - x''2)$$

تحت القيود :

$$x1+(x'2 - x''2) \leq 5$$

$$2\ x1+(x'2 - x''2) \leq 10$$

$$x1 \geq 0$$

$$x'2 \geq 0$$

$$x''2 \geq 0$$

- **3 ـ الحالة الثالثة: إشارة المتغيرات سالبة $xj < 0$:**

قد تأخذ بعض متغيرات نموذج البرمجة الخطية قيما سالبة، يتوجب تعويض كل متغيرة سالبة بمتغيرة أخرى (- x′j)، على مستوى القيود الوظيفية و كذا على مستوى دالة الهدف، حيث أن x′jمتغيرة موجبة أو معدومة، أي:

$$xj = - x'j$$

$$x'j \geq 0$$

مثال 03-04:

أكتب نموذج البرمجة الخطية أدناه على الشكل النموذجي:

$$Max\ Z = 15x1+12\ x2$$

Soumise aux contraintes

$$7x1+9x2 \leq 25$$

$$8\ x1+4x2 \leq 40$$

$$x1 < 0$$

$$x2 \geq 0$$

نلاحظ أن المتغيرة x1لا تحقق شرط عدم سلبية متغيرات القرار، و بغرض جعلها تحقق ذلك يتوجب علينا تعويضها بمتغيرة أخرى (- x′1)حيث أن 0≤ x′1، و عليه يصبح النموذج كالتالي:

$$\text{Max } Z = -15\,x'_1 + 12\,x_2$$

تحت القيود:

$$-7\,x'_1 + 9x_2 \leq 25$$

$$-8\,x'_1 + 4x_2 \leq 40$$

$$x'_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

تمرين للمراجعة وللبحث وتعزيز القدرات

- تمرين : ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:
- $Max\ Z = 10\ x1 + 12\ x2$
- تحت القيود:
- $x1 + 2\ x2 \leq 40$
- $-3\ x1 - 2\ x2 \geq -60$
- $x1 - 2\ x2 \geq 02$
- $x1\ ,\ x2 \geq 0$
- المطلوب:1- حل نموذج البرمجة الخطية أعلاه بالطريقة الجبرية؛

الدرس السادس: حل نماذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس

في حالة وجود أكثر من ثلاث متغيرات في المشكلة فإنه لا يمكن استخدام الطريقة البيانية، لذلك يتم تقديم طريقة أخرى و المسماة طريقة السمبلكس Simplexeالتي ابتكرها الرياضي George Dantzigعام 1947، و هي عبارة عن أسلوب اختياري تكراري لتحليل مشاكل البرمجة الخطية، و يعتمد هذا الأسلوب على اختيار المتغيرات ذات التأثير الأساسي على كلمن دالة الهدف و القيود و يهمل المتغيرات الأخرى التي لا تؤثر على دالة الهدف و القيود.

1- خطوات الحل باستخدام طريقة السمبلكس:

تعد طريقة السمبلكس من أهم طرق حل نماذج البرمجة الخطية مهما كان عدد المتغيرات التي تحتويها المشكلة، و هي طريقة تتابعية تنطلق من حل ابتدائي ممكن مروراً بحل أفضل وصولا إلى حل أمثل، مما يجعلنا نطلق عليها مصطلح خوارزمية السمبلكس. و فيما يلي خطوات و مراحل تطبيق السمبلكس:

مثال 04-01:

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 70\,x1+40\,x2+60\,x3$$

تحت القيود:

$$4x1+2x2+4x3 \leq 1000$$

$$2x1+2x2+x3 \leq 800$$

$$x1+3x2+x3 \leq 400$$

$$x1 \geq 0$$

$$x2 \geq 0$$

$$x3 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 70x_1+40x_2+60x_3$$

تحت القيود:

$$4x_1+2x_2+4x_3+S_1=1000$$

$$2x_1+2x_2+x_3+S_2=800$$

$$x_1+3x_2+x_3+S_3=400$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 70x_1+40x_2+60x_3+0S_1+0S_2+0S_3 \quad \Leftrightarrow$$

تحت القيود:

$$4x_1+2x_2+4x_3+S_1+0S_2+0S_3=1000$$

$$2x_1+2x_2+x_3+0S_1+S_2+0S_3=800$$

$$x_1+3x_2+x_3+0S_1+0S_2+S_3=400$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

1- 2- إيجاد أول حل أساس مقبول:

بما أن النموذج يحتوي على 6 متغيرات، و 3 معادلات فإنه يتم الحصول على أول حل أساي مقبول عن طريق عدم 3متغيرات (6-3=3)و لتكن متغيرات القرار (متغيرات خارج الأساس) x1=0، x2=0، x3=0و بعد التعويض في قيود النموذج أعلاه نحصل على قيم متغيرات الأساس: S1=1000، S2=800، S3=400، و الذي يعتبر حل الأساس المقبول الأول، حيث أن Z=0ما يعني أن المؤسسة لازالت في بداية نشاطها و لم تقم بعملية الإنتاج.

1- 3- تشكيل جدول السمبلكس الأول:

- تتم في المرحلة الأولى تشكيل جدول يضم في السطرين الأول و الثاني متغيرات النموذج (متغيرات القرار، متغيرات الفجوة)، حيث تكتب في السطر الأول معاملات هذه المتغيرات ((Cjفي دالة الهدف و في السطر الثاني تكتب المتغيرات؛
- تكتب في العمودين الأول و الثاني (على اليسار) متغيرات الأساس المتحصل عليها من أول حل أساس مقبول مع معاملاتها ((Cjفي دالة الهدف؛
- في باقي خانات الجدول تتم كتابة معاملات كافة المتغيرات في القيود الوظيفية؛
- في العمود B rayonتتم كتابة المتاح (من القيود الوظيفية)؛

- في السطر $Zj = \sum Cj\ xj$ يتم ضرب معاملات المتغيرة الأولى لكافة القيود الوظيفية في معاملات متغيرات الأساس، ثم جمعها، مثلا: $(4\times0)+(2\times0)+(1\times0)=0$، و ذلك للحصول على القيمة Zj و هكذا؛
- في السطر $Z = Cj - Zj$ يتم طرح قيم Zj من معاملات كافة المتغيرات في دالة الهدف (أول سطر Cj)؛
- للحصول على قيمة دالة الهدف Z يتم ضرب معاملات متغيرات الأساس العمود الأول (Cj).
- الجدول رقم 02: جدول السمبلكس الأول للمثال 04-01

C_j →		70	40	60	0	0	0	B rayon	R_i
↓		↓ x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
0	← S_1	(4)	2	4	1	0	0	1000	1000/4 = 250
0	S_2	2	2	1	0	1	0	800	800/2 = 400
0	S_3	1	3	1	0	0	1	400	400/1 = 400
$Z_i = \sum C_i x_i$		0	0	0	0	0	0	Z = 0	
$Z = C_i - Z_i$		70	40	60	0	0	0		

4-1 قراءة حل الأساس المقبول الموافق للجدول:

أ- تحديد المتغيرة الداخلة: المتغيرة الداخلة هي تلك المتغيرة خارج الأساس المعدومة التي تتحول إلى متغيرة أساس موجبة يتم اختيارها كما يلي: ذات أكبر معامل موجب في Z = Cj - Zj، و يشار إليها بسهم في الجدول، و في مثالنا هذا هي المتغيرة x1ذات المعامل) Z=70أقل معامل سالب في حالة نموذج .(Min)

ب- **تحديد المتغيرة الخارجة**: المتغيرة الخارجة هي متغيرة أساس موجبة و التي تتحول إلى متغيرة خارج الأساس معدومة يتم تحديدها في الجدول كما يلي: نقوم بقسمة قيم الشعاع (1000, 800, 400) Bعلى قيم عمود المتغيرة الداخلة (4, 2, 1) x1 فنحصل على قيم .(250, 400, 400) Riو بناءً على ذلك فإن المتغيرة الخارجة هي التي تقابل أقل حاصل قسمة موجب ((Ri، و يشار إليها في الجدول بسهم، و في مثالنا هذا تمثل S1المتغيرة الخارجة.

جـ- **تحديد عنصر الارتكاز**: يمثل عنصر الارتكاز نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة Pivot = Lp ⋂ Cp، يشار إليه بدائرة في الجدول، و في مثالنا هو 4.

1- 5-تشكيل جدول السمبلكس الثاني:

الجدول رقم 07: جدول السمبلكس الثاني للمثال 04-01

- يتم تشكيل جدول السمبلكس الثاني بإدخال المتغيرة الداخلة مكان المتغيرة الخارجة؛
- تتم قسمة قيم سطر الارتكاز (Lp)في الجدول الأول على عنصر الارتكاز نفسه (Lp/P)؛
- قيم عمود الارتكاز في الجدول الأول تصبح أصفاراً في الجدول الثانيCp=0، ماعدا عنصر الارتكاز الذي يبقى مساويا للواحدP=1؛
- قيم باقي الأسطر يتم حسابها عن طريق ضرب عدد في قيم سطر الارتكاز الجديدة، مع إضافة القيم القديمة للسطر)في الجدول الأول) أي: القيمة الجديدة للسطر= .(a).Lp + Linitiale

C_i →		70	40	60	0	0	0	B rayon	R_i
↓		x_1	↓x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
70	x_1	1	1/2	1	1/4	0	0	250	500
0	S_2	0	1	-1	-1/2	1	0	300	300
0	←S_3	0	(5/2)	0	-1/4	0	1	150	60
$Z_i=\sum C_i x_i$		70	35	70	70/4	0	0	Z = 17500	
$Z=C_i-Z_i$		0	5	-10	-70/4	0	0		

مثال: قيم السطر الثاني يتم حسابها كما يلي:

Lp=1)+(Li=2)=0, (-2)(1/2)+(2)=1, (-2)(1)+(1)= -1, (-2)( )(2-)
1/2-=(0)+(1/4)

- يتم الحصول على قيم Zjعن طريق ضرب معاملات متغيرات الأساس في معاملات المتغيرات في القيود الوظيفية.

مثال: (1×70) + (0×0) + (0×0) = 70، (1/2×70) + (1×0) + (1/2×0) = 35.

- بعدها يتم تحديد قيمة Zإن كانت مثلى، و ذلك إن كانت جميع معاملاتها سالبة أو معدومة، و في حالتنا هذه، قيمة Zليست مثلى لأن هناك قيمة موجبة (5)، و عليه يتم إنشاء جدول سمبلكس ثالث بغية تحسين الحل مرة أخرى، و ذلك بدءً بحساب قيم Riو تحديد المتغيرة الداخلة و الخارجة.

- تتم قراءة حل الأساس المقبول الموافق للجدول الثاني كما يلي:

متغيرات الأساس: x1=250, S2=300, S3=150

متغيرات خارج الأساس: x2=0, x3=0, S1=0

و عليه و بالاعتماد على الخطوات السابقة يتم الانتقال من أول حل أساس مقبول ذو Z=0إلى حل أساس مقبول آخر ذو Z=17500، أي يتم تحسين الحل الأول.

1- 6-تشكيل جدول السمبلكس الثالث:

تمثل x2المتغيرة الداخلة في هذه الحالة لأنها توافق أكبر معامل لـ Z وS3هي المتغيرة الخارجة لأنها توافق أدنى قيمة لـ Ri، و عليه فإن نقطة تقاطع سطر الارتكاز (المتغيرة الخارجة) و عمود الارتكاز (المتغيرة الداخلة) تمثل نقطة الارتكاز .P=5/2

الجدول رقم 03: جدول السمبلكس الثالث للمثال 04-01

C_i → / ↓		70	40	60	0	0	0	B rayon	R_i
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
70	x_1	1	0	1	3/10	0	-1/5	220	
0	S_2	0	0	-1	-2/5	1	-2/5	240	
40	x_2	0	1	0	-1/10	0	2/5	60	
$Z_i = \sum C_i x_i$		70	40	70	17	0	2	Z = 17800	
$Z = C_i - Z_i$		0	0	-10	-17	0	-2		

من جدول السمبلكس الثالث نجد أن حل الأساس المقبول المُحسن هو:

$x1=220,\quad x2=60,\quad S2=240,\quad x3=0,\quad S1=0,\quad S3=0 \Rightarrow Z = 17800$

- بالنسبة لـــ Zنجد أنه لا يمكننا تحسين الحل مرة أخرى لأن النموذج تعظيم، و إذا أخذنا المتغيرة x3فإننا سوف نُخفض Zبـــ (-10) لكل وحدة من x3، لذا نتوقف؛
- بما أن جميع معاملات متغيرات النموذج لـــ Zسالبة أو معدومة فإن الحل الأخير هو الحل الأمثل (لأن اختيار أي وحدة أخرى سوف يؤدي إلى تخفيض قيمة دالة الهدف)؛
- إذا كانت معاملات متغيرات النموذج من نوع تعظيم Maxسالبة أو معدومة، فإن الحل الأخير هو الحل الأمثل، أما في النموذج من نوع تدنية Minفإننا نحصل على الحل الأمثل عندما تكون كافة المعاملات موجبة أو معدومة.

تمرين للمراجعة وللبحث وتعزيز القدرات

تمرين :

- باستخدام طريقة السمبلكس أوجد الحلول المثلى لنماذج البرمجة الخطية أدناه.

$$\text{Min } Z = -6x_1 - 7x_2 - 8x_3$$

تحت القيود:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 120$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 200$$

$$x_1 \geq 0 \, , \, x_2 \geq 0, \, x_3 \geq 0$$

الدرس السابع: النموذج الثنـائي و تحليل الحساسية

من الظواهر المهمة المصاحبة لمسائل البرمجة الخطية نموذج الثنائية و التي تعرف بتحويل نموذج البرمجة الخطية الأولي إلى نموذج الثنائية، و يختص هذا الأخير بسهولة حله عند حصول أي تغير في معاملات و إتاحة المتغيرات في النموذج الأولي بعد صياغته و حله، و تستخدم هذه الخاصية في تسهيل ظاهرة الحساسية لنموذج البرمجة الخطية.

1.تعريف النموذج الثنائي:

تشير هذه النظرية إلى أن لكل نموذج من نماذج التعظيم نموذجا مقابلا (ثنائيا) يمثل نموذج تدنية التكاليف، و أن هناك صفة مشتركة ما بين النموذجين تتمثل في أن الحل الأمثل لأحدهما يعطي الحل الأمثل للنموذج الآخر.

2.خطوات تشكيل النموذج الثنائي:

يمكن تلخيص خطوات تحويل النموذج الأصلي إلى نموذج ثنائي بالشكل التالي:

- عندما يكون النموذج الأصلي يعبر عن مشكلة الوصول إلى أقصى قيمة Maxفإنه يتحول إلى الوصول إلى أدنى قيمة Minعند إعداد النموذج الثنائي، و العكس صحيح؛
- الموارد المتاحة و المذكورة في الجانب الأيسر لقيود النموذج الأصلي تصبح معاملات دالة الهدف في النموذج الثنائي؛

- معاملات متغيرات دالة الهدف في النموذج الأصلي تصبح قيم الجانب الأيسر في النموذج الثنائي؛
- تُحول أعمدة النموذج الأصلي إلى صفوف في النموذج الثنائي؛
- كلا النموذجين متحرران من مبدأ السلبية لكافة المتغيرات (إضافة شرط عدم سلبية المتغيرات).

إضافة إلى ذلك نقوم بـــــ:

- تحويل اتجاه المتباينات من النموذج الأصلي إلى النموذج المقابل (≤ تصبح ≥ و العكس)؛
- تغيير ترميز المتغيرات من النموذج الأصلي إلى النموذج المرافق (x1...xnتصبح (y1...yn).
- و بناء على ذلك يصبح عدد متغيرات النموذج الثنائي مساويا لعدد قيود البرنامج الأولي.
- و عليه تكون الصيغ القانونية للنموذجين الأولي و الثنائي كما يلي:

$$\text{Min } W = b'y \quad -$$
$$s/c \quad A'y \geq C \quad -$$
$$y \geq 0 \quad -$$
$$\text{Max } Z = C'x \quad \Rightarrow \quad -$$
$$s/c \quad Ax \leq b \quad -$$
$$x \geq 0 \quad -$$

و للتوضيح أكثر سوف نأخذ المثال التالي:

مثال 05-01: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 100\,x1+200\,x2+300\,x3$$

Soumise aux contraintes

$$2x1+x2+4x3 \leq 1000$$

$$5x1+5x2+7x3 \leq 1500$$

$$8x1+9x2+4x3 \leq 2000$$

$$5x1+2x2+x3 \leq 2500$$

$$x1, x2, x3 \geq 0$$

نلاحظ أن النموذج يحتوي على 3 متغيرات و التي تمثل 3 أنواع من المنتجات، تعتمد المؤسسة في إنتاج هذه المنتجات على 4 موارد متاحة، حيث أنها تسعى من خلال هذه العملية إلى تعظيم الأرباح المترتبة عن بيع هذه المنتجات، في المقابل سيسعى مشتري هذه المنتجات إلى تدنية تكاليف شرائها مع تحفيز صاحب المؤسسة على البيع، فتصبح دالة الهدف الخاصة بهذا المشتري من نوع تدنية:

$$\text{Min } W = 1000\,y1+1500\,y2+2000\,y3+2500\,y4$$

حيث تمثل (y1, y2 , y3 , y4)أسعار المواد الأولية.

في الوقت نفسه ستقوم المؤسسة ببيع المنتجات في حال ما إذا كان العائد المحقق من بيعها أكبر من العائد على الإنتاج، فتصاغ هذه العملية كما يلي:

$$y1+5y2+8y3+5y4 \geq 1002$$

$$y1+5y2+9y3+2y4 \geq 200$$

$$4y1+7y2+4y3+4y4 \geq 300$$

و عليه فإن النموذج المرافق للنموذج الأولي أعلاه يكون من الشكل:

$$\text{Min } W = 1000\,y1+1500\,y2+2000\,y3+2500\,y4$$

تحت القيود:

$$2y1+5y2+8y3+5y4 \geq 100$$

$$y1+5y2+9y3+2y4 \geq 200$$

$$4y1+7y2+4y3+4y4 \geq 300$$

$$y1, y2, y3 , y4 \geq 0$$

أما في حالة نماذج التدنية فيكون برنامج الثنائية كما يلي:

النموذج الأولي	النموذج الثنائي
$Max\ Z = 5x_1+6x_2$ $Soumise\ aux\ contraintes$ $\begin{cases} 7x_1+6x_2 \le 100 \\ 2x_1+4x_2 \le 150 \\ 3x_1+9x_2 \le 220 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	$Min\ W = 100\ y_1+150\ y_2+220\ y_3$ $Soumise\ aux\ contraintes$ $\begin{cases} 7y_1+2y_2+3y_3 \le 5 \\ 6y_1+4y_2+9y_3 \le 6 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$

تمرين للمراجعة وللبحث وتعزيز القدرات

- **التمرين** : لتكن نماذج البرمجة الخطية التالية:

Max Z= 20 x1+15 x2 +18 x3 -

- تحت القيود:

5x1 + 10x2 +4x3 ≤ 80 -

15x1 + 12x2 +5x3 ≤ 120 -

- 7x1 + 21x2 +3x3 ≤ 84 x1=0, x2=0, x3=20 الحل الأمثل:

x1≥0, x2≥0, x3≥0 -

Max Z= 10 x1+15 x2 -

- تحت القيود:

2x1 + 4x2 ≤ 40 -

6x1 + 2x2 ≤ 60 -

0x1≥0, x2≥0 -

- الحل الأمثل: x1=8, x2=6

- **المطلوب:**

- أوجد النماذج الثنائية للنماذج الأصلية، و العكس.

الدرس الثامن: مسائل النقل (الصياغة)

تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة، حيث أنها تهتم بتوزيع المنتجات من عدة مصادر للعرض (معامل، موانئ ...) إلى عدة مواقع للطلب (مراكز استهلاكية) بأقل تكلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت. فالبرمجة الخطية تستعمل للتوزيع الأمثل للموارد بالمؤسسة، أما طريقة النقل لها نفس هذه الخواص مضافا إليها شرط تساوي العرض مع الطلب.

1- عرض مسألة النقل:

سنقوم بعرض مسألة النقل من خلال المثال أدناه:

مثال 01-01: لنفرض أنه لدينا مؤسسة اقتصادية لها 3 وحدات إنتاجية O1، O2، O3متواجدة في ثلاث مناطق مختلفة، كما أنها تتوفر على 5 مراكز توزيع D1، D2، D3، D4، D5، حيث أن هذه المؤسسة تنتج المنتج Pعلى مستوى مراكز الإنتاج، ثم تقوم بتوزيعه على مراكز التوزيع الخمسة.

تعرض مراكز الإنتاج (المنبع)كميات معينة من الإنتاج: a1، a2، a3، أما مراكز التوزيع (المصب) فتقوم بطلب كميات معينة من الإنتاج: b1، b2، b3، b4، b5، كما هو موضح في الجدولين أدناه.

O_3	O_2	O_1	مركز الإنتاج
$a_3=260$	$a_2=160$	$a_1=240$	الطاقة الإنتاجية (العرض d_i)

D_5	D_4	D_3	D_2	D_1	مركز التوزيع
$b_5=140$	$b_4=125$	$b_3=145$	$b_2=150$	$b_1=120$	الطلب (b_j)

عملية نقل المنتج Pمن مراكز الإنتاج الثلاثة إلى مراكز التوزيع الخمسة يترتب عليها تحمل تكلفة النقل .Cij

Cijتمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج Pمن مراكز الإنتاج iإلى مركز التوزيع . j

تكلفة النقل الوحدوية يقدمها الجدول أدناه:

C_{ij}	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
O_1	$C_{11}=100$	$C_{12}=800$	$C_{13}=100$	$C_{14}=500$	$C_{15}=400$
O_2	$C_{21}=500$	$C_{22}=500$	$C_{23}=300$	$C_{24}=600$	$C_{25}=700$
O_3	$C_{31}=200$	$C_{32}=900$	$C_{33}=500$	$C_{34}=900$	$C_{35}=800$

2- نمذجة مسائل النقل:

2-1- تشكيل جدول مسائل النقل:

إن العرض الإنشائي لمسألة النقل حسب المثال أعلاه، يمكن تلخيصه في جدول شامل يسمى جدول مسألة النقل، يكون كالتالي:

الجدول رقم 05: جدول مسألة النقل للمثال 01-01

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	$C_{11}=100$ x_{11}	$C_{12}=800$ x_{12}	$C_{13}=100$ x_{13}	$C_{14}=500$ x_{14}	$C_{15}=400$ x_{15}	240
O_2	$C_{21}=500$ x_{21}	$C_{22}=500$ x_{22}	$C_{23}=300$ x_{23}	$C_{24}=600$ x_{24}	$C_{25}=700$ x_{25}	160
O_3	$C_{31}=200$ x_{31}	$C_{32}=900$ x_{32}	$C_{33}=500$ x_{33}	$C_{34}=900$ x_{34}	$C_{35}=800$ x_{35}	260
b_i	120	130	145	125	140	660

يلخص جدول مسائل النقل كامل المسألة، بحيث تظهر فيه تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل وحدة إنتاجية إلى كل مركز توزيع في أعلى كل خانة، و تظهر متغيرات المسألة و هي القيم xijالمراد البحث عنها، كما تظهر الكميات القصوى التي تعرضها كل وحدة، و كذا كمية الطلب لكل منطقة.

2-2- الصياغة الرياضية لمسائل النقل:

يمكن صياغة مشكل النقل في شكل نموذج رياضي كما يلي:

أ- تحديد متغيرات القرار: تمثل القيم xijمتغيرات القرار في مسائل النقل، و عددها في مثالنا السابق 15 متغيرة قرار، حيث:

x11 : تمثل الكمية الواجب نقلها من مركز الإنتاج O1إلى مركز التوزيع .D1

x43 : تمثل الكمية الواجب نقلها من مركز الإنتاج O4إلى مركز التوزيع .D3

ب- صياغة دالة الهدف: دالة الهدف في هذه الحالة هي عبارة عن تدنئة التكاليف المترتبة عن عملية النقل. و تكون من الشكل التالي:

$$\text{Min } Z = 100x11 + 800x12 + 100x13 + 500x14 + 400x15 + 500x21 + 500x22 + 300x23 + 600x24 + 700x25 + 200x31 + 900x32 + 500x33 + 900x34 + 800x35$$

جـ- صياغة القيود: لدينا نوعين من القيود: قيود العرض و قيود الطلب.

قيود العرض:

$$x21 + x22 + x23 + x24 + x25 = 160$$

$$x31 + x32 + x33 + x34 + x35 = 260$$

قيود الطلب:

$$x11 + x21 + x31 = 120$$

$$x12 + x22 + x23 = 130$$

$$x13 + x23 + x33 = 145$$

$$x14 + x24 + x34 = 125$$

$$x15 + x25 + x35 = 140$$

قيود عدم سلبية المتغيرات: $xij \geq 0$

الدرس التاسع: حل مسائل النقل

يقصد بحل مسائل النقل إيجاد قيم متغيرات القرار xijالمجهولة، لذلك فإن الأسلوب الرياضي لحل هذه المسائل يمر بمرحلتين أساسيتين هما: إيجاد الحل الابتدائي الممكن و التي تتضمن ثلاث طرق و هي: طريقة الزاوية الشمالية الغربية، طريقة التكاليف الدنيا، طريقة فوجل التقريبية، ثم تحسين الحل الابتدائي في المرحلة الثانية وتتضمن هذه المرحلة هي الأخرى طريقتين هما: طريقة المسار المتعرج و طريقة عوامل الضرب.

1- المرحلة الأولى: تحديد الحل الابتدائي

1-1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية : يقصد بها أول خانة في الجدول إلى الأعلى و إلى اليسار، و هي الخلية التي ينطلق منها إيجاد الحل الأساسي الأول، و يتم ذلك بإتباع المنهجية التالية و بالتطبيق على المثال السابق:

- أول خلية موافقة لمركز الإنتاج الأول و مركز التوزيع الأول (أعلى إلى اليسار)، نجد أن طلب مركز التوزيع D1هو 120 وحدة، بينما حجم العرض O1هو 240 وحدة، فيحصل D1على كافة طلبه 120 وحدة من D1، و يتشبع بذلك العمود الأول D1، و يتبقى لمركز الإنتاج O1كمية تقدر بـ 120 وحدة.

- بالانتقال إلى الخلية المقابلة و الموافقة لمركز الإنتاج O1، و مركز التوزيع D2، تقدر الكمية المعروضة بـــ 120 وحدة و هي الكمية المتبقية بعد التوزيع الأول، و حجم الطلب 130 وحدة، و عليه ستوجه كل الكمية المعروضة من O1إلى D2، فيتشبع السطر الأول، و يبقى طلب D2هو 10 وحدات ينبغي على O2تلبيته، و هكذا. خطوات هذه الطريقة يلخصها الجدول أدناه:

- الجدول رقم **06**: حل مسألة النقل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية للمثال 01-01

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	100 **120**	800 **120**	100 /	500 /	400 /	~~240~~ ~~120~~
O_2	500 /	500 **10**	300 **145**	600 **5**	700 /	~~160~~ ~~150~~ ~~5~~
O_3	200 /	900 /	500 /	900 **120**	800 **140**	~~260~~ ~~140~~
b_i	~~120~~	~~130~~ ~~10~~	~~145~~	~~125~~ ~~120~~	~~140~~	660

و بذلك نحصل على جدول الحل الأساسي الأول، و الذي نجد فيه:

x11=120: أي أن O1 يقوم بتموين D1 بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـــ 100 وحدة؛

x12=120: أي أن O1 يقوم بتموين D2 بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـــ 800 وحدة؛

x22=10: أي أن O2 يقوم بتموين D2 بمقدار 10 وحدات بتكلفة تقدر بـــ 500 وحدة؛

x23=145: أي أن O2 يقوم بتموين D3 بمقدار 145 وحدة بتكلفة تقدر بـــ 300 وحدة؛

x24=5: أي أن O2 يقوم بتموين D4 بمقدار 5 وحدات بتكلفة تقدر بـــ 600 وحدة؛

x34=120: أي أن O3 يقوم بتموين D4 بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـــ 900 وحدة؛

x35=140: أي أن O3 يقوم بتموين D5 بمقدار 140 وحدة بتكلفة تقدر بـــ 800 وحدة؛

- يتم حساب التكلفة الكلية وفق هذه الطريقة عن طريق ضرب قيمة التكلفة الوحدوية في كمية الإنتاج لكافة مراكز الإنتاج و التوزيع، أي:

Z=(100×120)+(800×120)+(500×10)+(300×145)+(600×5)+(900×120)+(800×140)=379500

- عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (m)+عدد الأعمدة (n) – 1

2-1- طريقة التكاليف الدنيا:

تختلف هذه الطريقة عن سابقتها في إيجاد الحل الأساسي الأول، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ بتشبيع الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول، ثم التكلفة المساوية أو الموالية و هكذا، حتى يتم استيفاء كل العرض والطلب، بحيث نحصل على عدد متغيرات داخلة في الحل يساوي .(m+n-1)

و بالعودة إلى مثالنا السابق، يمكن تطبيق هذه الطريقة كما يلي:

-نلاحظ أن أدنى تكلفة في الجدول هي 100، أي إما نقل المنتج من المنبع الأول O1إلى المصب الأول D1أو من المنبع الأول O1إلى المصب الثالث D3، و طريقة الاختيار هنا تعتمد على أكبر قدر من الطلب، فلو تمت مقارنة طلب كل من المصب الأول و الثاني، فإن المؤسسة حتما سوف تختار الطلب الأكبر لتصريف أكبر قدر من منتجاتها، لذلك يتم إشباع طلب المصب الثالث كليا من المنبع الأول؛

-أما التكلفة الموالية فهي 100، أي نقل المنتج من المنبع الأول O1إلى المصب الأول D1، حيث يتم تزويده بـ 95 وحدة المتبقية من 240 وحدة بعد التوزيع، و بذلك يتشبع السطر الأول، أي أن الكمية المعروضة في المنبع الأول 0؛

-أما التكلفة الموالية فهي 200، و هي تكلفة نقل المنتج من المنبع الثالث O3إلى المصب الأول D1، وهنا يتم تزويد هذا الأخير بـ 25 وحدة فقط و هي احتياجاته بعد حصوله على 95 وحدة من المنبع الأول، وبالتالي يتشبع العمود الأول، و هكذا يتم الانتقال بين الخلايا تصاعديا، كما في الجدول أدناه:

الجدول رقم 07: حل مسألة النقل بطريقة التكاليف الدنيا للمثال 01-01

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	100 **95**	800 /	100 **145**	500 /	400 /	~~240~~ ~~95~~
O_2	500 /	500 **130**	300 /	600 **30**	700 /	~~160~~ ~~30~~
O_3	200 **25**	900 /	500 /	900 **95**	800 **140**	~~260~~ ~~235~~ ~~95~~
b_i	~~120~~ ~~25~~	~~130~~	~~145~~	~~125~~ ~~95~~	~~140~~	660

Z=(100×95)+(100×145)+(500×130)+(600×30)+(200×25)+(900×95) + (800×140)=309500

3-1 طريقة فوجل :

تعتبر طريقة فوجل التقريبية (طرقة الفروقات العظمى) من أهم الطرق الثلاث على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة على الوصول للحل الأمثل أو الحل القريب من الأمثل، و نادرا ما تكون طريقة التكلفة الدنيا وطريقة الزاوية الشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل، إلا أنها تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه الطريقتين السابقتين. وتتلخص خطوات إيجاد الحل الابتدائي لهذه الطريقة كما يلي:

-حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف و في كل عمود؛

-تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك أكبر فرق التكلفة (أعلى جزاء)؛

-اختيار الخلية ذات التكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود؛

-في الخلية التي اختيرت في الخلية الثالثة، نقارن احتياجات المصب مع ما هو متوفر في المنبع لنأخذ القيمة الأقل؛

-نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة و الصفوف، و ذلك بعد إلغاء العمود أو السطر المشبع، و تكرر العملية السابقة إلى أن نلبي احتياجات كل المصبات من المنابع المتاحة.

و بالعودة إلى مثالنا السابق، سنقوم بتطبيق مراحل هذه الطريقة، وفق المراحل التالية:

- نقوم بحساب الفرق بين أدنى تكلفتين على مستوى جميع الأسطر و الأعمدة فنحصل على القيم: (100-100=0، 300-500=200، 500-200=300) على مستوى الأسطر الثلاث، ونحصل على القيم: (200-100=100، 800-500=300، 300-100=200، 600-500=100، 700-400=300) على مستوى الأعمدة؛
- نقوم باختيار أكبر فرق بين الأعمدة و الأسطر، نلاحظ في هذا المثال أن 300 هي أكبر فرق و قد تكررت في السطر الأخير و العمودين الثاني و الخامس، و هنا يتم اختيار أكبر فرق بينها و الذي يوافق أدنى تكلفة، و هو السطر الثالث و الذي يوافق 200 التي تعبر عن أدنى تكلفة في الجدول؛

-تعبر الخلية 200 عن تكلفة تزويد المصب الأول بالمنتج من المنبع الثالث، لذلك يتم تزويد طلبه المتمثل في 120 وحدة من 260 وحدة (عرض المنبع الثالث)، و بذلك يتم إشباع المصب الأول (العمود الأول)، و يتبقى للمنبع الثالث كمية معروضة تقدر بـــ 140 وحدة؛

- و هكذا يتم إلغاء العمود الأول من جدول النقل لكونه مشبعا، و يتم تحيين الجدول بإعادة حساب الفرق بين التكاليف المتبقية، فنحصل على (actualisation) القيم: 300، 200، 300 في الأسطر الثلاث، و تبقى القيم: 300، 200، 100، 300 في الأعمدة الأربعة المتبقية، نقوم باختيار أكبر فرق (300) و الذي يوافق أدنى تكلفة (100)؛

-تمثل الخلية 100 عن تكلفة نقل المنتجات من المنبع الأول إلى المصب الثالث، لذلك يتم تزويد هذا الأخير بكل طلبه المتمثل في 145 وحدة من أصل 240 وحدة معروضة لدى المنبع الأول، و هكذا يتم إشباع العمود الثاني، و إلغاؤه، و يبقى للمنبع الأول كمية معروض تقدر بـــ 95وحدة؛

-و بإتباع نفس الخطوات في كل مرة، نحصل على النتائج المبينة في الجدول أدناه:

الجدول رقم 08: حل مسألة النقل بطريقة فوجل للمثال 01-01

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i	الفرق
O_1	100 /	800 /	100 **145**	500 /	400 **95**	240 ~~95~~	0 300 100
O_2	500 /	500 **130**	300 /	600 **30**	700 /	~~180~~ ~~30~~	200 200 100
O_3	200 **120**	900 /	500 /	900 **95**	800 **45**	~~260~~ ~~140~~	300 300 100
b_i	~~120~~	~~130~~	~~145~~	~~125~~ ~~95~~	~~140~~ ~~45~~	660	
الفرق	100	300 400	200	100 300	300 100		

انطلاقا من الجدول أعلاه أنه تم ملئ جميع الخانات، لذلك نتوقف عن تطبيق طريقة Vogel، و عليه تم الحصول على حل الأساس المقبول:

- متغيرات الأساس الموجبة: و عددها 07= (m+n-1)

x13=145, x15=95, x22=130, x24=30, x31=120, x34=95, x35=45

- متغيرات خارج الأساس المعدومة: و تمثل باقي متغيرات القرار.

بعدها نقوم بتعويض قيم متغيرات القرار على مستوى القيود الوظيفية للتحقق منها.

و بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف نقوم أيضا بتعويض قيم متغيرات القرار في دالة هدف نموذج النقل، فنحصل على:

Z =100 (0)+800 (0)+100 (145)+500 (0)+400 (95)+500 (0)+500 (0)+900 (0)+500 (0)+900 (120)+200 (0)+700 (30)+600 (0)+300 (130)+800 (95)+800 (45)=281000

قيمة دالة الهدف المحصل عليها باستخدام طريقة Vogel (281000)أقل من التكلفة الإجمالية للنقل المحصل عليها بطريقة التكاليف الدنيا (309500)، و أقل أيضا من التكلفة الإجمالية المحصل عليها بطريقة الزاوية الشمالية الغربية (379500).

2- المرحلة الثانية: تحسين الحل الابتدائي

و تتضمن هذه المرحلة طريقتين هما: طريقة المسار المتعرج و طريقة عوامل الضرب.

2-1- طريقة المسار المتعرج: يتم في هذه الطريقة اختبار الخلايا الفارغة الموجودة في مصفوفة الحل الابتدائي الذي تم التوصل إليه بإحدى الطرق السابقة، و المقصود بالخلايا الفارغة تلك المربعات الموجودة في المصفوفة والتي لم يتم النقل إليها، أي التي تحتوي على xij = 0، و يمكن تلخيص هذه الطريقة في الخطوات التالية:

- يتم تحديد و رسم مسارات الخلايا الفارغة؛
- يتم حساب القيم الجبرية للخلايا الفارغة؛
- يتم اختيار الخلية الفارغة التي تحمل القيمة الجبرية الأشد سلبية و تتم دراسة مسارها، و ذلك بأخذ مسار مغلق (إشارته بالتناوب +، -، + ...) و يتم اختيار أصغر قيمة من بين الزوايا التي تحمل الإشارة (-)؛
- تكرر هذه العمليات إلى غاية الوصول إلى قيم جبرية للخلايا تكون موجبة أو مساوية للصفر و الذي يعني الوصول إلى الحل الأمثل.

تمرين للمراجعة وللبحث وتعزيز القدرات

تمرين: ليكن لدينا نموذج النقل التالي:

الجدول رقم 09: مسألة النقل للمثال 02-01

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 x_{11}	5 x_{12}	3 x_{13}	1 x_{14}	90
O_2	3 x_{21}	1 x_{22}	2 x_{23}	4 x_{24}	80
O_3	4 x_{31}	2 x_{32}	1 x_{33}	5 x_{34}	70
b_i	40	50	110	40	240

المطلوب: قم بحل هذا التمرين باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية للحصول على الحل الابتدائي و من ثم تحسين الحل باستخدام المسار المتعرج.

الدرس العاشر: تمثيل مسائل النقل بنظرية الشبكة

يهتم أسلوب شبكات النقل بحل كثير من المسائل الاقتصادية و التقنية منها، خاصة مسائل نقل المسافرين والبضائع أو نقل و توزيع مختلف المواد، و من أجل معالجة مختلف الجوانب المتعلقة بهذه المسائل نلجأ إلى استخدام تقنية الشبكات.

من بين تطبيقات نظرية شبكات النقل يمكن ذكر مسائل البحث عن المسارات ذات القيمة المثلى، مسألة التدفق الأعظم عبر الشبكة ، مسألة المسافر التجاري و غيرها.

1- الشبكة : هو هيكل يحتوي على مجموعة من العناصر تسمى بالرؤوس و مجموعة أخرى من العناصر تسمى بالأقواس و يرمز للشبكة بالرمز U(X) تمثل الرؤوس على الرسم بنقاط و الأسهم بأقواس. وتنقسم الشبكات إلى:

1-1- الشبكة الكاملة : هو هيكل يكون فيه أي رأس من الرؤوس مرتبط بكل من الرؤوس الأخرى على مرة واحدة.

1-2- الشبكة الموجهة: هي هيكل يتكون من رؤوس تربطها أسهم موجهة، بمعنى أن السير فيها يخضع لاتجاه الأسهم.

1-3- الشبكة غير الموجهة : هي هيكل يتكون من رؤوس تربطها أسهم غير موجهة، في هذا النوع من الشبكات يسمى السهم الذي يربط أي رأسين "بالحد".

2- المسار (Le chemin): في أي شبكة نسمي مسارا كل سلسلة متصلة من الأسهم التي يكون فيها الطرف النهائي لكل منها هو عبارة عن الطرف الابتدائي للسهم الذي يليه، ما عدا السهم الأخير.

في مسائل النقل يمكن التمييز بين أنواع مختلفة من مسارات النقل التي تربط بين مراكز التوزيع و مراكز الاستلام

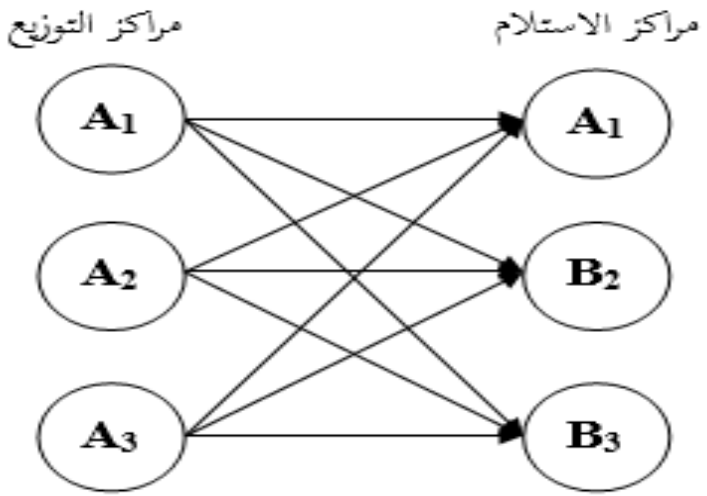
و ذلك على أساس الاعتبارين التاليين:

الاعتبار الأول: عدد مراحل النقل (مسارات النقل ذات المرحلة الواحدة، مسارات النقل متعددة المراحل)؛

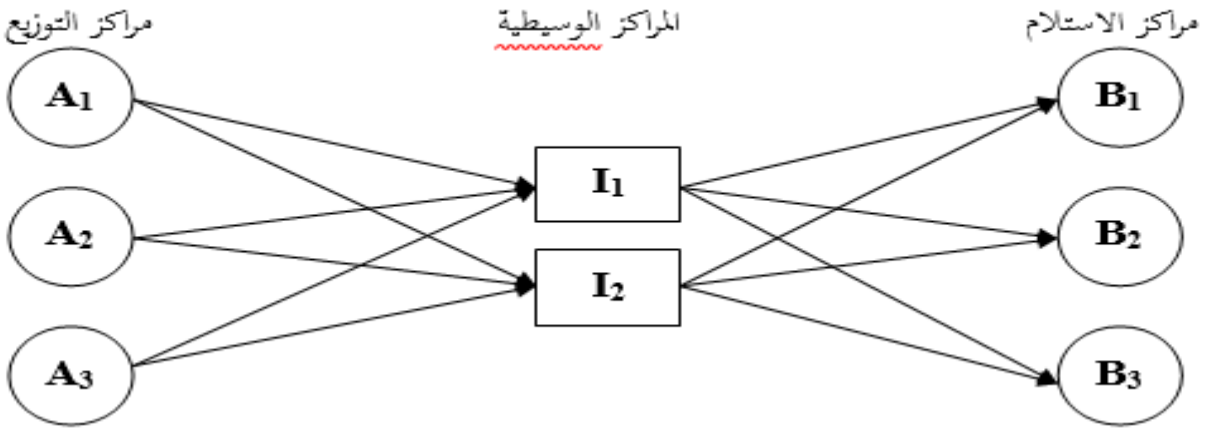
الاعتبار الثاني: توازن كمية العرض مع كمية الطلب، ما يسمى بالنقل المغلق و النقل المفتوح، ففي حالة النقل المغلق يكون التوازن موجوداً، أما في حالة النقل المفتوح فلا يتحقق التوازن، مما يجعلنا نفكر في إدخال مركز استلام أو مركز توزيع وهمي.

و الأشكال أدناه توضح أنواع المسارات:

الشكل رقم 02: مسارات نقل ذات مرحلة واحدة



الشكل رقم **03**: مسارات نقل ذات مراحل متعددة



3- الحلقة : المسار الذي يكون فيه الطرف النهائي للسهم الأخير هو عبارة عن الطرف الابتدائي للسهم الأول، يسمى بالمسار المغلق أو الحلقة. طول أي مسار هو عبارة عن مجموع القيم التي تعبر عنها الأسهم المشكلة و تسمى عادة بالقيم المرافقة.

و لذلك توجد عدة طرق تستعمل من أجل استخراج قيمة المسار ذو القيمة الأصغر، من بينها: طريقة Ford، طريقة R.BELLMAN، طريقة G.DANTZIG، طريقة FLOYD. المصفوفات

تمرين :

الجدول أدناه يقدم تكاليف النقل الوحدوية لنقل منتج معين من 03 مراكز إنتاج إلى 04 مراكز توزيع، بالإضافة إلى عرض كل مركز إنتاج و طلب كل مركز توزيع.

	D_1	D_2	D_3	D_4	A_i
O_1	12	13	04	06	500
O_2	06	04	10	11	700
O_3	10	09	12	04	800
b_i	400	900	200	500	

المطلوب: 1- انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكِّل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؛

2- قدم نموذج النقل الموافق لجدول النقل المتوصل إليه؛

3- أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؛

4- أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؛

5- أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة فوجل، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له.

حل التمرين :

1- **تشكيل جدول النقل:**

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	12 x_{11}	13 x_{12}	04 x_{13}	06 x_{14}	500
O_2	06 x_{21}	04 x_{22}	10 x_{23}	11 x_{24}	700
O_3	10 x_{31}	09 x_{32}	12 x_{33}	04 x_{34}	800
b_i	400	900	200	500	2000

- صياغة نموذج النقل:

Min Z =12 x11+13 x12+4 x13+6 x14 +6 x21+4 x22+10 x23+11 x24 +10 x31+9 x32+12 x33+4 x34

قيود العرض:

x11 + x12 + x13 + x14 + x15 = 500

x21 + x22 + x23 + x24 + x25 = 700

x31 + x32 + x33 + x34 + x35 = 800

قيود الطلب:

$x11 + x21 + x31 = 400$

$x12 + x22 + x23 = 900$

$x13 + x23 + x33 = 200$

$x14 + x24 + x34 = 500$

قيود عدم سلبية المتغيرات:

3- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	12 **400**	13 **100**	04 /	06 /	~~500~~ 100 0
O_2	06 /	04 **700**	10 /	11 /	~~700~~ 0
O_3	10 /	09 **100**	12 **200**	04 **500**	~~800~~ ~~600~~ 0
b_i	400	900	200	500	2000

Min Z =12 (400)+13 (100)+4 (0)+6 (0) +6 (0)+4 (700)+10 (0)+11 (0) +10 (0)+9 (100)+12 (200)+4 (500) = 14200

3- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	12 **300**	13 /	04 **200**	06 /	500 300 0
O_2	06 /	04 **700**	10 /	11 /	700 0
O_3	10 **100**	09 **200**	12 /	04 **500**	800 300 100
b_i	400	900	200	500	2000

Min Z =12 (300)+13 (0)+4 (200)+6 (0) +6 (0)+4 (700)+10 (0)+11 (0) +10 (100)+9 (200)+12 (0)+4 (500) = 10400

4-إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة فوجل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	الفرق
O_1	12 /	13 /	04 200	06 300	500 300 0	2 6
O_2	06 /	04 700	10 /	11 /	700 0	2 2 2
O_3	10 400	09 200	12 /	04 200	800 600 400	5 5 1
b_i	400 0	900 200 0	200 0	500 200 0	2000	
الفرق	4 4 4	5 5 5	6	2 2 7		

Min Z =12 (0)+13 (0)+4 (200)+6 (300) +6 (0)+4 (700)+10 (0)+11 (0) +10 (400)+9 (200)+12 (0)+4 (200) = 12000

تمرين للمراجعة وللبحث وتعزيز القدرات

- **التمرين :**
- الجدول أدناه يقدم معطيات لمسألة نقل ما.

	D_1	D_2	D_3	D_4	A_i
O_1	20	17	15	10	130
O_2	16	14	18	13	50
O_3	12	15	11	19	100
b_i	40	40	80	120	

- **المطلوب**:1- انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكِّل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؛
- 2- أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا؛

تمارين مقترحة

- **التمرين الأول:** مؤسسة لنقل المسافرين تمتلك نوعين من السيارات: سيارة 5 ركاب و سيارة 11 راكبا، حيث تعمل السيارات على خطين لنقل المسافرين، علما أن كل سيارة تستطيع القيام برحلة واحدة يوميا. يبلغ إيراد النوع الأول 5000 دج على الخط الأول 6000 دج على الخط الثاني، أما النوع الثاني فيبلغ إيرادها 8000 دج على الخط الأول و 10000 دج على الخط الثاني. عدد الأشخاص المتوقع نقلهم على الخط الأول لا يتجاوز 2000 شخص بينما لا يتجاوز عدد 1500 على الخط الثاني. أجرت المؤسسة دراسة أوضحت بأن تخصيص 10 سيارات من النوع الأول على الخط الأول يمكن أن يعود عليها بالإيراد المطلوب، أما عند تخصيص أكثر من 10 سيارات فإن ذلك يمكن أن يؤدي إلى خسارة في الإيراد مقدارها 2000 دج لكل سيارة.
- المطلوب: صياغة النموذج الرياضي و الذي يسمح بتحديد عدد السيارات و الذي يعظم إيرادات المؤسسة.

التمرين الثاني : ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 4000\,x1 + 6000\,x2$$

Soumise aux contraintes

$$10\,x1 + 20\,x2 \leq 800$$

$$60\,x1 + 40\,x2 \leq 2400$$

$$x1, x2 \geq 0$$

المطلوب: 1- حدد منطقة الحلول المقبولة و إحداثيات النقاط الرأسية لها؛

2- حدد قيمة دالة الهدف عند كل نقطة رأسية، ثم أوجد الحل الأمثل؛

3- حدد القيود المشبعة و غير المشبعة بيانيا و جبريا.

- **التمرين الثالث**: لتكن نماذج البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Min } Z = 600x_1 + 400x_2 + 400x_3$$

تحت القيود:

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 60$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Min } Z = 80x_1 + 120x_2 + 84x_3$$

تحت القيود:

$$5x_1 + 15x_2 + 7x_3 \geq 20$$

$$10x_1 + 12x_2 + 21x_3 \geq 15$$

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 18$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المطلوب: باستخدام طريقة السمبلكس، أوجد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية أعلاه.

التمرين الرابع: مؤسسة إنتاجية ما تزود 4 زبائن لها بالمنتج الذي يتم إنتاجه في 6 وحدات إنتاجية، الكميات القصوى من الإنتاج التي تستطيع الوحدات الإنتاجية توفيرها، الطلب الأقصى للزبائن و كذلك التكلفة الوحدوية للنقل يوضحها الجدول أدناه

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	الطلب
O_1	8	12	4	18	30	22	600
O_2	18	6	14	28	24	16	450
O_3	16	4	12	24	8	26	750
O_4	28	22	4	16	6	10	650
العرض	500	400	250	450	300	550	2450

المطلوب: إيجاد شبكة النقل الأرخص و التي تسمح للمؤسسة بنقل المنتج إلى زبائنها بأقل تكلفة ممكنة.

خاتمة

في ختام دراستنا لمقياس بحوث العمليات، يتضح لنا الدور المحوري الذي تلعبه هذه الأداة العلمية في دعم اتخاذ القرار داخل المؤسسات الاقتصادية. إذ تمكّن النماذج الرياضية وأساليب التحليل الكمي من معالجة المشكلات المعقدة وتقديم حلول فعالة تساعد على تحسين تخصيص الموارد، وتقليل التكاليف، وتعظيم الأرباح. كما أن إدماج بحوث العمليات في ميدان الاقتصاد يعزز من القدرة على التخطيط الاستراتيجي وفهم التفاعلات الديناميكية داخل الأسواق. ومن خلال ما تم اكتسابه من معارف ومهارات، يصبح الطالب قادراً على توظيف هذه الأدوات في تحليل القضايا الاقتصادية المعاصرة وصياغة السياسات الكفيلة بتحقيق التنمية الاقتصادية المستدامة. وعليه، فإن بحوث العمليات لا تمثل فقط أداة تحليل، بل تُعدّ عنصراً أساسياً في بناء رؤية اقتصادية عقلانية ومبنية على أسس علمية دقيقة.

المصادر والمراجع

- Evans, J. R., Oison, D. L., "Statistics, Data Analysis, and Decision Modeling", 1st ed. Prentice Hall, New Jersey, 2000.
- Behnezhof, A. R., and Khoshnevis, B., "Integration of machine requirements is planning and aggregate production planning, production planning and control, vol.7, no.3, pp.22-92, 8, 2000.
- Anderson, D . R. Sweeney D. G., Williams , T. A. "Introduction to Management Science A Quantitive Approach to Decision Making with CD- Roum, New York, 2001.
- ريتشارد برونسون(2004)، بحوث العمليات، ترجمة حسن حسنى الغباري، 21. سلسلة ملخصات شوم،الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر
- عبد الرحمن بن محمد أبو عمه، محمد أحمد العش، البرمجة الخطية، مطبعة جامعة الملك سعود، الطبعة الأولى، المملكة العربية السعودية، 1990.
- عبد الرزاق الموسوي، المدخل لبحوث العمليات، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الثانية.
- عبد الستار أحمد محمد الآلوسي، أساليب بحوث العمليات (الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار)، دار القلم للنشر، الإمارات.

- علي حازم الياامور، استخدام نموذج البرمجة الخطية في تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل الذي يعظم الأرباح في ظل تطبيق نظرية القيود، ورقة بحثية مقدمة للمؤتمر العلمي الثاني للرياضيات، الإحصاء و المعلوماتية، 6-7 ديسمبر 2009، كلية علوم الحاسبات و الرياضيات، جامعة الموصل، العراق.

- محمد راتول، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية، 2006.

- محمد عبد العال النعيمي و آخرون، بحوث العمليات، دار وائل للنشر،عمان، الأردن، الطبعة الثانية، 2011.

- مصطفى أبو بكر، مصطفى مظهر، بحوث العمليات و فاعلية القرارات، مكتبة عين شمس، القاهرة، مصر، 1997.

- مكيد علي، بحوث العمليات و تطبيقاتها الاقتصادية "نظرية الشبكات و مسائل النقل و التخصيص"، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2016.

- منعم زمزير الموسوي، بحوث العمليات-مدخل علمي لاتخاذ القرارات-، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2009.