الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique Et Populaire

Ministère de l'Enseignement
Recherche la de et Supérieur
Scientifique
Université de Tissemsilt
Faculté des Sciences
Economiques Commerciales et
des Sciences de Gestion

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة تيسمسيلت
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية
وعلوم التسيير

دروس عبر الخط
مقياس نمذجة الظواهر الاقتصادية 1

من إعداد وتقديم الاستاذ الدكتور: دراجي عيسى

الفئة المستهدفة : طلبة العلوم الاقتصادية
المستوى الدراسي : سنة الأولى ماستر
تخصص: تحليل إقتصادي واستشراف

الموسم الجامعي
2025-2024

فهرس الدروس

الجزء الأول : مدخل إلى نمذجة الظواهر الاقتصادية

المحور 1 : مفهوم النمذجة الاقتصادية
المحور 2 : تعريف النموذج الاقتصادي
المحور 3 : متغيرات النموذج
المحور 4 : معادلات النموذج
المحور 5 : أنواع النماذج الاقتصادية
المحور 6 : مراحل بناء النماذج الاقتصادية القياسية

المحور 1 : مفهوم النمذجة الاقتصادية

لقد أخذت النماذج الاقتصادية اهتمام كبيرا من الدراسة خلال العقود الاخيرة نظراً لاستخداماتها الواسعة والمتعددة في البلدان المتطورة اقتصاديا وذلك من خلال تمكينها في رصد التغيرات الكلية المستقبلية لوضع خططها الاقتصادية القصيرة والمتوسطة الأجل حيث تركز النماذج الاقتصادية الكلية على تحليل بيانات الاقتصاد في شكل نماذج متعددة المعادلات ونماذج اشعة الانحدار الذاتي ونماذج التوازن العام ونماذج الدورة التجارية الحقيقية ونماذج العوامل التمثيلية وكانت النماذج التي طورت من بعد الحرب العالمية الثانية والمستوحاة من النموذج الكينزي

مفهوم النمذجة الاقتصادية:

إن عملية نمذجة الظواهر الاقتصادية، هو التفسير الرياضي المبسط لهذه الظاهرة، الذي يأخذ في الأغلب شكل معادلات أو متباينات أو توابع تمثل العلاقة التي يمكن قياسها كميا لمختلف العوامل التي لها علاقة بالظاهرة، وهناك عدة تعاريف لعملية النمذجة وجميعها تشترك في خاصية واحدة مستندة على الهدف الأساسي لعملية النمذجة، حيث تعتبر النمذجة مجموعة من العمليات التوصيقية لبناء النماذج التي يراد بها تبسيط التعامل مع الظاهرة الاقتصادية المعقدة، وهذا بدوره يعتمد على مجموعة من العناصر الأساسية، والتي تشمل على:

- الموضوع: أي بماذا يتعلق النموذج؟
- الهدف: ماذا سيفعل النموذج؟
- النظرية: على أية نظرية يستند النموذج؟
- الطريقة: كيف يستخدم النموذج نظريته؟

ومنه يمكن استخلاص تعريف عملية النمذجة على أنها فن تبسيط الروابط والعلاقات بين متغيرات النظام الذي يشمل على: الموضوع، الهدف، النظرية والطريقة .
وتلعب عملية النمذجة دور مهم من خلال الفائدة التي تقدمها النماذج، حيث تعد طريقة علمية تستخدم في الكشف عن سلوك الأنظمة، ويأتي هذا من الرغبة في معرفة التطور الديناميكي لمختلف الظواهر، وفي مجال التخطيط فقد عمم استخدام النماذج نتيجة قدرة النماذج على وصف مختلف الأنظمة المتحكمة في الظواهر محل الدراسة، وتوضيح سلوكها بما يؤمن إعادة صياغة تلك النظرية واختبارها، والتحقق من أسباب التطورات واتجاهاتها.
ومن جانب اخر تستخدم عملية النمذجة في الكشف عن الحالة المستقبلية لمختلف الظواهر والتي تم وصفها والتعرف على سلوكها، وتحديد درجة تطورها واتجاه هذا التطور. كما انها تساعد في تبيان نتائج مختلفة للبدائل في القرارات، وما يترتب على هذا من مساعدتنا في الاختيار بين هذه البدائل لرسم وتنفيذ مختلف السياسات والخطط الممكنة.

المحور 2 : تعريف النموذج الاقتصادي

يمكن تعريف النموذج الاقتصادي بأنه عبارة عن مجموعة من العلاقات التي تربط بين مجموعة من المتغيرات الاقتصادية، والتي يعبر عنها في صورة معادلات تشرح العلاقة بين هذه المتغيرات، فعلى سبيل المثال : النموذج الاقتصادي لسوق سلعة ما يتكون من ثلاث علاقات:

- ✓ دالة للطلب، $D = f(P)$
- ✓ دالة للعرض، $S = f(P)$
- ✓ شرط التوازن، والذي يتحقق عند مساواة الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة،

$D= S$

وتختلف النماذج الاقتصادية فيما بينها من حيث أنواع المتغيرات التي تحتويها والمعادلات التي تتكون منها، وحتى يمكننا أن نفهم الأنواع المختلفة للنماذج الاقتصادية فإن الأمر يتطلب أن نبدأ أولا بالتعرف على الأنواع المتغيرات، وكذلك الأنواع المختلفة من المعادلات، وبالتالي نكون في وضع يسمح لنا بالتعرف على أنواع النماذج الاقتصادية المختلفة

المحور 3 : متغيرات النموذج

تتضمن معادلة النموذج الاقتصادي العديد من المتغيرات الاقتصادية والتي تختلف باختلاف طبيعة المشكلة الاقتصادية المدروسة، وبصفة عامة يمكن تقسيم المتغيرات التي تحتويها مجموعة المعادلات لأي نموذج من النماذج الاقتصادية إلى نوعين من المتغيرات:

أ. المتغيرات النظامية:

وهي تلك المتغيرات التي تدخل في توصيف النموذج الرياضي الذي يشرح الظاهرة المدروسة والتي يمكن للباحث ان يجمع حولها بيانات حول تغيرها عبر فترة الدراسة أي يشترط في مثل هذه المتغيرات توافر شرطان اساسيان:

- زمن التأثير على الظاهرة المدروسة
- حجم. التأثير على الظاهرة المدروسة

وتنقسم المتغيرات النظامية بدروها إلى نوعين أساسين من المتغيرات:

❖ المتغيرات الداخلية:

وهي تلك المتغيرات التي تتحدد داخل النموذج الاقتصادي، الذي يمثل الظاهرة محل الدراسة وذلك بعد معرفة التقديرات العددية لمعالم النموذج، وقيم المتغيرات الأخرى فيه. وينبغي الإشارة هنا إلى أن النموذج الاقتصادي يكون كاملا إذا تساوى فيه عدد المعادلات التي يتضمنها مع عدد المتغيرات الداخلية المطلوب شرحها للتعرف على القوى المؤثرة عليها.

❖ المتغيرات المحددة سابقا:

هي تلك المتغيرات التي لا تتحدد قيمتها عن طريق النموذج محل الدراسة، وإنما تتحدد بعوامل أخرى خارجية لم يتم ادخالها في النموذج، وبالتالي لا تعامل على أنها متغيرات بقدر ما تعامل على أنها معطيات أو ثوابت. ومعنى ذلك أن هذه المتغيرات تؤثر على المتغيرات الداخلية، ولكنها لا تتأثر بها. كما تصنف المتغيرات المحددة مسبقا إلى متغيرات خارجية ومتغيرات داخلية محددة في فترات سابقة أو ذات فترات ابطاء.

❖ ب. المتغيرات العشوائية:

وهي تلك المتغيرات التي لا تظهر في المعادلات بصورة واضحة ومحددة المعنى، وهي التي يغيب عنها الشرطان الواجبا التوافر في المتغيرات النظامية. اين انها تلك المتغيرات التي يكون فيها الباحث لا يعرف زمن تأثير تلك المتغير على الظاهرة المدروسة وكذا لا يستطيع ان يعرف حجم تأثير المتغير على الظاهرة المدروسة ويتم التعبير عنها رياضيا بمتغير واحد يطلق عليه المتغير العشوائي، إذ أنه لا يعبر عن ظاهرة محددة أو مفهوم واضح، ولكنه يعبر عن حصيلة مجموعة كبيرة متنافرة من المتغيرات الأخرى .

المحور 4 : معادلات النموذج

بعد وصف المتغيرات الاقتصادية الداخلة في النموذج ننتقل إلى تركيب المعادلات التي يحتويها النموذج، مع تحديد الشكل الرياضي الذي تأخذه هذه المعادلات، وفيما يلي أهم الأشكال الرياضية لهذه المعادلات:

العلاقة الخطية: $Yi=\alpha+\beta Xi$

العلاقة الخطية بين y وبين مقلوبXi: $Y_i = \alpha + \frac{\beta}{X_i}$

العلاقة غير الخطية من الدرجة الثانية: $Y_i = \alpha + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2}$

العلاقة الأسية: $Y_i = \alpha X_i^{\beta}$

ملاحظة: يمكن تحويل أي علاقة غير خطية إلى علاقة خطية، وذلك باستعمال عدة تحويلات رياضية، من أهمها النشر المحدود لتايلور. وتسمى المعادلات التي يتضمنها النموذج الاقتصادي بالمعادلات الهيكلية، ذلك نظرا لما تعرضه هذه المعادلات من هيكل أساسي للظواهر الاقتصادية محل الدراسة.

ويختلف عدد المعادلات من نموذج إلى آخر تبعا لسهولة أو صعوبة تفسير الظاهرة الاقتصادية محل البحث، وتبعا للأهداف التي يسعى الباحث إلى تحقيقها من صياغته للنموذج الاقتصادي. ويمكن تقسيم المعادلات الهيكلية إلى ثلاث أنواع

✓ المعادلات السلوكية:

والمتمثلة في المعادلات التي تبين العلاقة الدالية بين المتغيرات المختلفة، وتكون هذه العلاقة ناشئة أساسا عن سلوك معين من جانب الافراد، أو من جانب العناصر المختلفة التي تؤثر على الدالة، وتظهر ردود فعلهم نتيجة للتغيرات التي تحدث في بعض المتغيرات، مثل: $C = f(Y)$

✓ المعادلات التعريفية:

وهو ذلك النوع من المعادلات الذي يعرف وضعا معنيا، أو يعرف متغيرا معنيا، أو يعطي قيمة محددة لأحد المتغيرات، ومن أمثلة المعادلات التعريفية، معادلات شرط التوازن في نماذج أسواق السلع المختلفة، والذي ينص على أن $D=S$. مثل هذه المعادلة لا تظهر سلوكا معينا أو رد فعل معين، ولكنها تكتفي بتعريف حالة توازن. وكذلك إذا عرفنا الدخل الوطني، بأنه : $Y=C+I$، فإن هذه المعادلة لا تظهر سلوكا معينا، ولكنها تكتفي بتعريف الدخل الوطني بأنه يساوي ما ينفق على الاستهلاك، وما ينفق على الاستثمار.

✓ المعادلات الفنية:

وهو ذلك النوع من المعادلات الذي يبين علاقات فنية بحتة بين المتغيرات ومن امثلتها دالة الإنتاج وهي العلاقة القائمة بين حجم الإنتاج والعوامل الداخلة في إنتاجه، كما في دالة إنتاج كوب دوجلاس الآتية:

$$\mathrm{X}_i = Aq_{1i}^{\propto}\, \mathrm{q}_{k1}^{\beta} \mathrm{u}_i \qquad i = 1,2 \ldots \ldots n$$

حيث : Xi: الكمية المنتجة من سلعة.

$q1$ qk : الكمية المستخدمة من عنصري: العمل ورأس المال على الترتيب.

المحور 5 : أنواع النماذج الاقتصادية

أ. النماذج الاقتصادية من حيث أنواع المتغيرات التي تحتويها

تنقسم النماذج الاقتصادية من حيث أنواع المتغيرات التي تحتويها إلى نوعين:

- ✓ **النماذج غير الاحتمالية: هي تلك النماذج التي تبين وجود علاقات تامة بين المتغيرات المختلفة، ومثال على ذلك النماذج التي يفترض الاقتصاد القياسي وجودها.**

- ✓ **النماذج الاحتمالية: وهي تلك النماذج التي لا تفترض وجود علاقات تامة بين المتغيرات، وإنما تأخذ في اعتبارها إدخال العنصر أو المتغير العشوائي في العلاقة للتعبير عن أثر المتغيرات الأخرى التي لم تتضمنها العلاقة بالإضافة إلى الاعتبارات المختلفة التي تدعو إلى إدخال مثل هذا المتغير. وهذا النوع من النماذج هو ما نهتم به في دراسة الاقتصاد القياسي.**

ب. النماذج الاقتصادية من حيث عنصر الزمن

تقسيم النماذج الاقتصادية تبعا لعنصر الزمن إلى نوعين أساسيين:

النماذج الثابتة (الستاتيكية):

وتعرف بأنها تلك النماذج التي تظهر حالة معينة في لحظة معينة دون أن تأخذ في الاعتبار أثر التغير في الزمن أو أثر الزمن على النموذج، ومن هنا فإن جميع المتغيرات الداخلة في تركيب معادلات النموذج الثابت (داخلية وخارجية) تكون بقيمتها الجارية.

النماذج الديناميكية:

وتعرف بأنها تلك النماذج التي يظهر أثر الزمن فيها بصورة واضحة، بمعنى أنه لا يكتفي بمجرد إظهار الأثر النهائي للتغير الذي يمكن أن يحدث، ولكنه أيضا يبين كيفية الوصول إلى هذا التغير.

التمييز بين النموذج الاقتصادي والنموذج القياسي:

النموذج الاقتصادي هو عبارة عن مجموعة من الفرضيات التي تشرح (بالتقريب) سلوك اقتصاد بلد ما أو قطاع اقتصادي معين. أما النموذج القياسي فيحتوي على ما يلي:

- ✓ مجموعة من المعادلات السلوكية أو التقنية مشتقة من النموذج الاقتصادي تحتوي هذه المعادلات على بعض المتغيرات المشاهدة والبعض الآخر غير مشاهدة نكتبه في شكل متغير عشوائي هو "عنصر الخطأ"
- ✓ تقرير مفصل حول ما إذا كانت هناك أخطاء في قياس ملاحظات المتغيرات المشاهدة.
- ✓ تخصيص توزيع احتمالي لهذه الأخطاء العشوائية (أو أخطاء القياس).

المحور 6 : مراحل بناء النماذج الاقتصادية القياسية

من الأهمية بمكان أن يتوفر لدى الاحصائي فكرة مبسطة عن منهج البحث القياسي التطبيقي، أي الخطوات أو المراحل التي ينبغي اتباعها والمشاكل التي يتعين التنبيه لها والأمور التي يحسن مراعاتها عند إجراء بحث اقتصادي تطبيقي باستخدام اساليب الاقتصاد القياسي. وبصفة عامة يمكن تقسيم خطوات بناء النماذج الاقتصادية القياسية إلى المراحل الأربع الأساسية الآتية:

أ. توصيف النموذج:

وتعتبر هذه المرحلة الخطوة الأولى للبحث في مجال الاقتصاد القياسي، كما أنها تعتبر أهم خطواته، حيث تعتمد عليها جميع المراحل التالية. ويتطلب توصيف أو صياغة النموذج تحديد الظاهرة المراد تفسيرها، والعوامل التي يمكن أن تساعد على تفسير سلوكها. ويحاول الباحث القياسي في هذه المرحلة دراسة العلاقة بين المتغيرات المختلفة والتعبير عن هذه العلاقة في صورة رياضية وهذا ما نعنيه بتوصيف النموذج.

ويعتمد توصيف النموذج على النظرية الاقتصادية، وعلى كل ما يتوفر لدينا من معلومات عن الظاهرة محل الدراسة، لذلك كان لزاما على الباحث القياسي أن يكون على دراية كبيرة بالنظرية الاقتصادية بصفة عامة، وبالظاهرة موضوع الدراسة بصفة خاصة. كما ينبغي على الباحث القياسي أن يجمع كافة البيانات أو المعلومات المتعلقة بالظاهرة محل الدراسة، بالإضافة إلى إلمامه بمختلف الدراسات المنشورة والتي سبق إجراءها بواسطة غيره من الباحثين، وتتضمن عملية توصيف النموذج ما يلي:

- ✓تحديد المتغير التابع والمتغير أو المتغيرات المستقل التي ينبغي إدخالها في النموذج.
- ✓معرفة التوقعات النظرية لما يمكن أن تكون عليه إشارات وقيم معالم الدوال، والتي سيتم على أساسها تقسيم التقديرات المتحصل عليها لمعالم النموذج.
- ✓تحديد الشكل الرياضي للنموذج من حيث عدد المعادلات التي تحتوي عليها وكونها خطية أو غير خطية.
- ✓تحويل النموذج الرياضي إلى نموذج احصائي أو احتمالي، وذلك بإدخال العنصر أو المتغير العشوائي، والذي يعبر عن الاعتبارات التي سبق الإشارة إليها مثل المتغيرات التفسيرية التي لم تدخل في المعادلة ويكون لها تأثيرها على المتغير التابع، الجزء غير المنتظم في السلوك الاقتصادي للإنسان،.....إلخ.

ب. تقدير معالم النموذج

بعد قيام الباحث بتوصيف النموذج للظاهرة محل الدراسة، وبعد أن يقوم بتحويله من الصورة الرياضية إلى الصورة الاحتمالية أو الاحصائية فإن الخطوة التالية هي تقدير معالم (أو معاملات) النموذج باستخدام الطريقة المناسبة للتقدير. وتتطلب هذه المرحلة من الباحث القياسي أن يكون ملما إلماما كاملا بكافة طرق القياس والفروض الخاصة بكل طريقة وتتضمن هذه المرحلة، ما يلي:

- ✓جمع البيانات عن جميع المتغيرات الداخلة في النموذج
- ✓دراسة الشروط الخاصة بالتميز للدالة محل الدراسة
- ✓اختيار الطريقة أو الأسلوب المناسب لتقدير معالم النموذج: ونعني بذلك أنه يتعين على الباحث القياسي أن يكون على دراية كبيرة بالطرق المختلفة لتقدير معالم النماذج والفروض الخاصة بكل طريقة، والمعنى الاقتصادي للتقديرات الخاصة بمعالم النموذج.

ويعتبر إلمام الباحث بالطرق المختلفة للقياس أو التقدير عاملا هاما للحصول على تقديرات جيدة يمكن الاعتماد عليها ويمكن تقدير معاملات العلاقات الاقتصادية بعدد من الطرق يمكن تصنيفها إلى مجموعتين رئيسيتين:

➢طرق تقدير معالم المعادلة الواحدة

وتطبق هذه الطرق لتقدير معلمات معادلة واحدة ومن أهم هذه الطرق: طريقة المربعات الصغرى العادية OLS، طريقة المربعات الصغرى غير المباشر ILS طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين SLS2، طريقة الإمكان الأكبر للمعلومات المحدودة LIML

➢طرق تقدير معالم المعادلات الآنية

وتطبق هذه الطرق لتقدير معلمات مجموعة من المعادلات الآنية، ومن أهم هذه الطرق: طريقة المربعات الصغرى على ثلاث مراحل SLS3، وطريقة الإمكان للمعلومات الكاملة FIML.

ويتوقف اختيار الطريقة المناسبة للتقدير على عدة عوامل أهمها:

- ✓العلاقة بين المتغيرات
- ✓خصائص المقدرات المتحصل عليها من كل طريقة من طرق التقدير وتوافر الفروض الخاصة بكل طريقة.
- ✓بساطة الطريقة من حيث العمليات الحسابية اللازمة
- ✓الوقت والتكاليف اللازمين لتقدير معلمات النموذج.

ت. تقييم نتائج التقديرات:

بعد الانتهاء من تقدير المعلمات باستخدام الطريقة القياسية المناسبة للتقدير، فإن المرحلة الثالثة للبحث القياسي هي تقييم هذه التقديرات المتحصل عليها بمعنى أن يقرر الباحث على أساس اختبارات معينة ما إذا كانت هذه التقديرات مرضية ويمكن قبولها والاعتماد عليها. وتنقسم الاختبارات التي يتم على أساسها تقييم تقديرات معلمات النموذج إلى ثلاث أقسام، هي:

✓الاختبار الاقتصادي:

وهذه المعايير تحددها النظرية الاقتصادية وتهتم بإشارات وقيم معلمات العلاقات، وإذا ظهرت بعض التقديرات بإشارة مخالفة لما تقرره النظرية الاقتصادية، فإنه ينبغي رفض التقدير لتناقضه مع النظرية، إلا إذا كان هناك سبب قوي يمكن أن يستدل عليه.
وفي حالة رفض التقدير ذو الإشارة أو القيمة المخالفة لتوقعات النظرية فإنه يتعين إعادة النظر في صياغة العلاقة من حيث المتغيرات الداخلة فيها أو العلاقات الإضافية التي يمكن إدخالها في النموذج أو محاولة تقديرها من بيانات أخرى.

✓الاختبار الاحصائي:

وهذا الاختبار تحدده النظرية الاحصائية ويهدف إلى تقييم التقديرات المتحصل عليها لمعلمات النموذج وكذا درجة ثقة في هذه التقديرات، ومن أهم المقاييس الاحصائية المستخدمة: معامل التحديد، والخطأ المعياري للتقدير. ويأتي الاختبار الاحصائي في المرتبة الثانية بعد الاختبار الاقتصادي فإذا جاءت تقديرات بعض المعلمات بإشارات أو قيم مخالفة فإنه يجب رفضها تماما حتى وإن كان معامل التحديد كبير أو كانت الاخطاء المعيارية للتقديرات صغيرة جدا، بحيث تجعل معالم العلاقة معنوية احصائيا، في مثل هذه الحالات تكون التقديرات غير مقبولة من الناحية الاقتصادية النظرية حتى ولو كانت المعالم معنوية احصائيا.

✓الاختبار القياسي:

وهذا الاختبار تحددها نظرية الاقتصاد القياسي ويهدف إلى إرشاد الباحث إلى ما ينبغي أن تكون عليه التقديرات المتحصل عليها كعدم التحيز والاتساق وغير ذلك، كما يهدف إلى البحث عن مدى مطابقة فروض الأساليب القياسية المستخدمة والتي تختلف باختلاف الطرق القياسية، أي أن الاختبار القياسي له أهميته من الناحيتين:

- أولا: أنه يحدد مدى امكانية الاعتماد على الادوات الاحصائية
- ثانيا: أنه يحدد مدى تحقق الخصائص المرغوبة فيها في التقديرات المتحصل عليها لمعلمات النموذج.

ث. تقييم القوة التنبؤية للنموذج:

وتعتبر هذه المرحلة الأخيرة في مراحل البحث القياسي، وتهتم بتقييم القوة أو الفترة التنبؤية للنموذج، إن الغرض من الحصول على تقديرات لمعالم النموذج هو إمكان استخدامها في التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغيرات أو بعبارة أخرى في اتخاذ القرارات. ويمكن تقييم أو اختبار القدرة التنبؤية للنموذج كما يلي:

- ✓قياس مدى استقرار التقديرات، أي مدى حساسيتها للتغير في حجم العينة، وتتلخص هذه الطريقة في إضافة مشاهدات أو بيانات جديدة للعينة الأصلية السابق استخدامها في تقدير معلمات النموذج، ثم إعادة عملية التقدير باستخدام العينة الجديدة (الأصلية مضافا إليها البيانات الجديدة)، ومن الطبيعي أن تختلف التقديرات المتحصل عليها في هذه الحالة عن تلك المتحصل عليها من بيانات العينة الأولى (الأصلية)، والفرق بين التقديرات يمكن اختباره احصائيا بالطرق الاحصائية المناسبة، فإذا كان الفرق معنويا دل ذلك على ضعف القوة التنبؤية للنموذج.
- ✓وتتلخص هذه الطريقة في استخدام التقديرات المتحصل عليها من بيانات العينة في النموذج لفترة أخرى لا تدخل في فترة العينة الأولى، ثم نقارن القيم المتحصل عليها للمتغير التابع (قيم التنبؤ) بالقيم الفعلية له وعادة ما يكون هناك اختلاف بين القيم المقدرة (قيم التنبؤ) والقيم الفعلية، والفرق بين القيم المحسوبة والفعلية يمكن عمل اختبار لمعرفة ما إذا كان معنويا احصائيا، فإذا وجدنا بعد إجراء الاختبار الاحصائي أن الفرق المعنوي، فإننا نستنتج أن القدرة التنبؤية للنموذج ضعيفة.

الجزء الثاني
نماذج الإنحدار الخطي البسيط

المحور 1 : النموذج الرياضي
المحور 2 : الفرضيات الأساسية للنموذج
المحور 3 : الفرضيات حول المعلمات المقدرة
المحور 4 : تحليل التباين لنموذج الانحدار الخطي البسيط
المحور 5 : معامل الارتباط البسيط

يعتبر الانحدار الخطي البسيط أبسط أنواع نماذج الانحدار، فتوجد العديد من العلاقات الاقتصادية التي يمكن قياسها باستخدام هذا الأسلوب، كعلاقة الإنفاق الاستهلاكي بالدخل المتاح، علاقة الكمية المعروضة من النقود بمعدل التضخم، أثر رقم أعمال المؤسسة ومصاريف الاشهار على أرباح المؤسسة....الخ.

إن الهدف من دراسة الانحدار بصفة عامة هو التنبؤ بقيمة متغير التابع dependent الذي يرمز له بالرمز Y بشرط معرفة قيمة المتغير المستقل Independent الذي يرمز له بالرمز X فإذا أعطينا قيمة ما للمتغير X في معادلة الانحدار المقدرة فإننا نجد قيمة المتغير التابع Y المتنبؤ بها.

معنى مصطلح بسيط: والانحدار هنا بسيط لوجود متغير مستقل واحد فقط في معادلة الانحدار.

معنى مصطلح خطي: إن كلمة خطي معناه أن النموذج يفترض وجود علاقة خطية بين المتغيرين XوY وبصفة عامة يمكن تفسير معنى الخطية في النماذج بطريقتين مختلفتين كما يلي:

الخطية في المتغيرات :linearity in the variables معناه أن التوقع الشرطي E(Y/Xi) دالة خطية في المتغير Xi أي أن منحى الانحدار عبارة عن خط مستقيم

الخطية في المعلمات :linearity in the parameters معناه أن التوقع الشرطي E(Y/Xi) دالة خطية في المعالم βi وليس في المتغيرات.

وفي دراستنا لنموذج الانحدار الخطي البسيط نعتبر خطية في المعلمات في مقابل ذلك ممكن أن تكون المتغيرات المفسرة خطية أو غير خطية، والجدول التالي يبن ذلك.

جدول رقم 01: نماذج الانحدار الخطية

النموذج خطي في المعالم	النموذج خطي في المتغيرات	
	نعم	لا
نعم	نموذج الانحدارخطي	نموذج الانحدارخطي
لا	نموذج الانحدارليس خطي	نموذج الانحدارليس خطي

المحور 1 : النموذج الرياضي

1–الصياغة الرياضية لنموذج الانحدار الخطي البسيط:

تكتب معادلة نموذج الانحدار الخطي البسيط بالعلاقة التالية:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i, i = \overline{1, n}$$

فالمعادلة تحتوي على: -المتغير التابع Y والمتغير المستقل .X، - α,β: هما معالم النموذج حيث β تسمى معامل الميل، قيمتها تبين قيمة ميل الخط الانحدار، وإن إشارة β :

- إذا كانت من اشارة موجبة فإن علاقة Y بالمتغير المستقل X علاقة طردية.
- إذا كانت من اشارة سالبة فإن علاقة Y بالمتغير المستقل X علاقة عكسية.
- اذا كانت $\beta=0$ معناه وجود استقلال بين المتغيرين والمتغير التابع في هذه الحالة يأخذ قيمة ثابتة $Y=\alpha$ والمعامل α يعرف بثابت الانحدار.

-يعرف εi بحد الخطأ ويرجع وجوده في معادلة الانحدار إلى إهمال بعض المتغيرات المستقلة التي يمكن أن تؤثر على المتغير التابع في النموذج، انخفاض حجم العينة، الصياغة الرياضية غير سليمة للنموذج المدروس، أو بعض الأخطاء أثناء فترة تجميع البيانات وقياس المتغيرات الاقتصادية المدرجة في النموذج. ولمعرفة قيم معالم معادلة الانحدار السابقة والقيم المتنبؤ بها يجب تقدير معادلة الانحدار.

02–فرضيات نموذج الانحدار الخطي البسيط:

يفترض نموذج الانحدار الخطي البسيط عدد من الفرضيات نوجزها في:

- H_1: الأمل الرياضي للأخطاء معدوم:

$$E(\varepsilon_i) = 0, \forall i = \overline{1,n}$$

- H_2: تجانس (ثبات) تباين الأخطاء Homoscedasticity : معناه أن تشتت الأخطاء حول المتوسط ثابت، ونكتب:

$$Var(\varepsilon_i) = E\left(\varepsilon_i^2\right) = \sigma^2, \forall i = \overline{1,n}$$

- H_3: عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء: بمعنى أن التباينات المشتركة لأخطاء الملاحظات المختلفة تكون معدومة، وهذا على مختلف مفردات العينة، ونكتب:

$$Cov\left(\varepsilon_i\varepsilon_j\right) = E\left(\varepsilon_i\varepsilon_j\right) = 0, \forall i, j = \overline{1,n}$$

- H_4: الأخطاء مستقلة عن المتغير المستقل X_i ونكتب:

$$Cov(\varepsilon_i x_i) = 0, \forall i = \overline{1,n}$$

- H_5: فرضية التوزيع الطبيعي للأخطاء (نتطرق اليها لاحقا)

المحور 2 : تقدير النموذج الخطي طريقة المربعات الصغرى:

3-تقدير معالم النموذج الانحدار الخطي البسيط:

نعتمد في تقدير معالم نموذج الانحدار الخطي البسيط على طريقة المربعات الصغرى العادية OLS التي تحاول إيجاد أحسن تصحيح خطي بتدنئه مجموع مربعات الانحراف بين المشاهدات الفعلية والمقدرة والتي يتم التعبير عنها كما يلي:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 = \min \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \min \sum_{t=1}^{n} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2$$

الشرط اللازم لتدنئة هذه العلاقة هو أن تكون المشتقات الجزئية بالنسبة $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ معدومة أي:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \hat{\beta}_0} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^{1n} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2 = 0 \end{cases}$$

وبحساب المشتقات الجزئية نتحصل على:

$$\begin{cases} 2(-1) \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0 \\ 2(-X_i) \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0 \\ -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i X_i - \hat{\beta}_0 X_i - \hat{\beta}_1 X_i^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}(Y_i X_i - \hat{\beta}_0 X_i - \hat{\beta}_1 X_i^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_1 X_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i X_i - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_0 X_i - \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_1 X_i^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} Y_i - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots.\ldots(1) \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

بقسمة المعادلة رقم (1) على n نتحصل على:

$$\bar{Y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 0$$

أي أن:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

بالتعويض في المعادلة رقم (2) نجد:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \left(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}\right) \sum_{i=1}^{n} X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0$$

بالتبسيط نجد ما يلي:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{\beta}_1 \bar{X} \sum_{i=1}^{n} X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - n\bar{X}\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - n\bar{X}\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X} n \bar{X}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - n\bar{X}\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right) = 0$$

ومنه:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

كما يمكن كتابة ذلك على الشكل التالي:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2} = \frac{\overline{XY} - \bar{X}\bar{Y}}{\overline{X^2} - \bar{X}^2}$$

أو:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{Cov(X_i, Y_i)}{Var(X_i)}$$

وعليه يمكن أن يعطى تقدير $\hat{\beta}_1$ بمختلف الصيغ التالية:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{Cov(X_i, Y_i)}{Var(X_i)} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\overline{XY} - \bar{X}\bar{Y}}{\overline{X^2} - \bar{X}^2}$$

المحور 3 : الفرضيات حول المعلمات المقدرة

في الغالب ان الظاهرة المطلوب دراستها هي التي تقترح طبيعة فرضية العدم والفرضية البديلة لكلا المعلمتين β_0 و β_1 . وسيتم تحديد أهم انواع الفرضيات ولكل معلمة من المعلمات على وفق الآتي:

اذا اردنا اثبات ان الميل لخط الانحدار β_1 او الحد الثابت β_0 لا يساوي صفراً فتكون الفرضية:

$$H_0: \beta_1 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \beta_1 \neq 0$$

$$H_0: \beta_0 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \beta_0 \neq 0$$

وهكذا يمكن تعميمه لاي قيمة غير الصفر.

ويسمى الاختبار بهذه الحالة اختبار بجانبين (Two tail test)

اذا كنا نسعى الى اثبات ان ميل انحدار المجتمع موجباً او ان الحد الثابت موجباً فتكون الفرضية:

$$H0: \beta 1 \leq 0 \text{ vs. } H1: \beta 1 > 0$$

$$H0: \beta 0 \leq 0 \text{ vs. } H1: \beta 0 > 0$$

ويسمى الاختبار في هذه الحالة اختبار بجانب واحد (One – tail test)

أما اذا أردنا اثبات ان ميل انحدار المجتمع سالباً او ان الحد الثابت سالباً فان الفرضية تصاغ على وفق الآتي:

$$H0: \beta 1 \geq 0 \quad \text{vs.} \quad H1: \beta 1 < 0$$

$$H0: \beta 0 \geq 0 \quad \text{vs.} \quad H1: \beta 0 < 0$$

المحور 4 : تحليل التباين لنموذج الانحدار الخطي البسيط

هو يقيس معنوية النموذج ككل اي يقيس الشكل الدالي بين المتغير التابع والمتغير التوضيحي (المستقل) وبما انه يوجد لدينا انحدار بسيط اي متغير مستقل واحد لذا فانه يقيس معنوية معلمة الانحدار اي معنوية ($\hat{\beta}_1$) ويستخدم المختبر الاحصائي (F)

جدول تحليل التباين للانحدار البسيط

- ANOVA-

Source of variation مصدر المتغيرات	Sum of squares (SS)	(d.f)	Mean squares MSS	F
(x) : الانحرافات الموضحة	$ESS = \hat{\beta}_1^2 \Sigma x^2 = \hat{\beta}_1 \Sigma xy$	1	$ESS/1$	$\frac{MES}{MRS} = \frac{ESS/1}{RSS/(n-2)}$
(البواقي): الانحرافات غير الموضحة	$RSS = \Sigma e^2 = TSS - ESS$	n-2	$RSS/n-2$	
الإجمالي: المجموع الكلي	$TSS = \Sigma y^2$	n-1		

اختبار حسن التوفيق Goodness of Fit

ويسمى ايضاً مقياس جودة التقدير أو معامل التحديد (Coefficient of determination) وهو مقياس يقيس تشتت المشاهدات حول خط الانحدار.

فهو يمثل الأهمية النسبية للتغيرات المشروحة من قبل معادلة التقدير.

ويرمز له R^2:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS}$$

المحور 5 : معامل الارتباط البسيط

ان تحليل الارتباط مختلف تماماً عن مفهوم الانحدار. فتحليل الارتباط هو مقياس لدرجة الترابط الخطي بين متغيرين ويرمز لمعامل ارتباط المجتمع بالرمز (ρ) اما في حالة العينة فيرمز له (r) والذي يعد تقديراً لمعامل ارتباط المجتمع (ρ) ويسمى معامل ارتباط بيرسن (Pearson). وبادئ ذي بدء لابد من توضيح الفرق المفاهيمي بين تحليل الانحدار وتحليل الارتباط. ففي تحليل الانحدار يوجد عدم تماثل في طريقة معاملة المتغير المعتمد والمتغير المستقل. فالمتغير المعتمد يفترض ان يكون عشوائيا ويمتلك توزيعاً احتمالياً. في حين المتغير المستقل يفترض ان تكون قيمه ثابتة للعينة المختارة. وعلى الجانب الآخر في تحليل الارتباط يتم معاملة المتغيرين بشكل متماثل.

ان الغرض من تحليل الارتباط الخطي البسيط هو تحديد نوع وقوة العلاقة بين متغيرين.

ويعرف معامل الارتباط بين متغيرين بأنه يتمثل في نسبة التغاير بين المتغيرين الى حاصل ضرب انحر افهما المعياريين

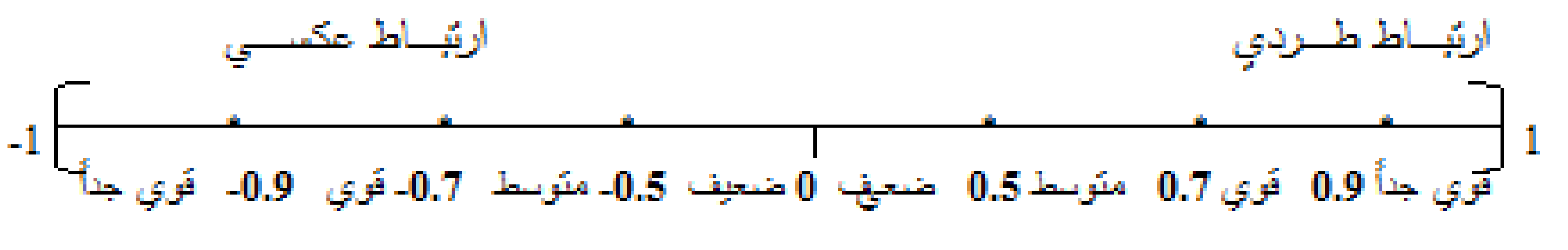
$$r = \hat{\rho}_{xy} = \frac{\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sqrt{\Sigma(X-\bar{X})^2(Y-\bar{Y})^2}} = \frac{\Sigma XY - n\bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{\Sigma X^2 - n\bar{X}^2}\cdot\sqrt{\Sigma Y^2 - n\bar{Y}^2}} = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}}$$

وهو يمثل الجذر التربيعي لمعامل التحديد.

$$r = \sqrt{R^2}$$

قوة العلاقة بين متغيرين يمكن تحديدها من حيث درجة قربها أو بعدها عن (± 1)حيث ان المدى لمعامل الارتباط البسيط هو: ($-1 < r < 1$) ويمكن تصنيف درجات القوة كما في الشكل ادناه

الشكل : درجات قوة معامل الارتباط



الجزء الثالث: نماذج الإنحدار الخطي المتعدد

المحور 1 : الصياغة الرياضية للنموذج وفرضياته
المحور 2 : تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد
المحور 3 : تقدير تباين الأخطاء ومصفوفة تباين-تغاير للمقدرات
المحور 4 : القدرة التفسيرية للنموذج
المحور 5 : اختبار المعنوية الإحصائية للمعالم
المحور 6 : اختبار المعنوية الكلية للنموذج وجدول تحليل التباين.

المحور 1 : الصياغة الرياضية للنموذج وفرضياته

نقوم من خلال هذا العنصر بالتطرق إلى الصيغة العامة لنموذج الانحدار الخطي المتعدد وفرضياته كما يلي:

1-1-الصياغة الرياضية للنموذج الانحدار الخطي المتعدد:

$$Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + u_t \ \forall t = 1,2,\ldots,n$$

$$\begin{aligned} t = 1 &: Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + \cdots \ldots + \beta_k X_{1k} + u_1 \\ t = 2 &: Y_2 = \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + \cdots ..+ \beta_k X_{2k} + u_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t = n &: Y_n = \beta_0 + \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + \cdots ..+ \beta_k X_{nk} + u_n \end{aligned}$$

ونكتب ذلك على الشكل المصفوفي كما يلي:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_t \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \\ 1 & x_{1t} & x_{2l} & \ldots & x_{kl} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \cdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2d} & \ldots & x_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ . \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ . \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$Y_{n.1} = X_{n.(k+1)} \beta_{(k+1).1} + U_{(n.1)}$$

ويمكن اختصار ذلك كما يلي:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_t \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \\ 1 & x_{1t} & x_{2l} & \ldots & x_{kl} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \cdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2d} & \ldots & x_{kn} \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ . \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ . \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

حيث:

- نلاحظ أن العمود الأول في المصفوفة X يحتوي على القيمة "1" وهي القيمة المقابلة لمعامل الحد الثابت β_0
- المصفوفة X ذات n سطر و k+1عمود (k عدد المتغيرات المفسرة)

1-2-فرضيات نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

- ❑ -**الأمل الرياضي للأخطاء معدوم**: أين مجموع الأخطاء يكون يساوي الصفر معناه أن الأخطاء لا تبدي أي أثر مجتمعة على المتغير التابع ونعبر عن ذلك بالعلاقة التالية: $E(u) = 0, \quad (\sum u_t = 0)$
- ❑ -**ثبات تباين الأخطاءhomoscedasticity:** فالأخطاء لها تباين ثابت مهما تغير الزمن.

$$E(uu') = \begin{pmatrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2) & E(u_1u_3) & \cdots & E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2) & E(u_2u_3) & \cdots & E(u_2u_n) \\ E(u_3u_1) & E(u_3u_2) & E(u_3^2) & \cdots & E(u_3u_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2) & E(u_nu_3) & \cdots & E(u_n^2) \end{pmatrix}$$

$$E(uu') = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 I_n \ \forall t$$

- ❑ -**المصفوفة X ثابتة في المعاينة المتكررة وليست عشوائية**: أي أن قيم المتغيرات المستقلة يمكن مراقبتها وهي غير مرتبطة بالأخطاء ونكتب: $\text{cov}(X, u) = E(X'u) = 0 \ \forall t$

- **–حجم العينة n أكبر من عدد المتغيرات k**: أي أن المصفوفة X تكون قابلة للقلب ويكون:

$$Rang\ (X) = k < n$$

- **–الأخطاء تتوزع طبيعيا**: ونكتب: $u_t \rightsquigarrow N(0,\sigma^2 I_n)$

وبعد الانتهاء من التطرق لفرضيات نموذج الانحدار الخطي المتعدد نقوم في العنصر ادناه بالتطرق إلى كيفية تقدير هذا النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية.

المحور 2 : تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد

نتطرق هنا إلى تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد من خلال التطرق إلى التقدير باستخدام طريقة المربعات الصغرى ثم التطرق إلى بعض خصائص شعاع المقدرات:

2-1-التقدير باستخدام طريقة المربعات الصغرى: تعتمد طريقة المربعات الصغرى على مبدأ تدنية مجموع مربعات الأخطاء أو أن تكون الانحرافات بين قيم المتغير التابع ومقدره أقل ما يمكن، أي يجب إيجاد مقدرات شعاع المعالم β بشكل يجعل القيمة المقدرة $\hat{Y}_t$ أقرب ما يمكن من Y يمكن التعبير عن ذلك كما يلي:

$$\mathrm{Min}\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2 = Min\hat{u}'\hat{u} = \mathrm{Min}(Y - X\beta)'(Y - X\beta) = \mathrm{MinS}$$

لإيجاد MinS بالنسبة β نبحث عن المشتقات الجزئية لـ S بالنسبة لـ β كما يلي:

-الشرط الأول: $\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}} = \frac{\partial \hat{u}'\hat{u}}{\partial \hat{\beta}} = 0$

حيث:

$$\begin{aligned}
\hat{u}'\hat{u} &= \left(Y - X\vec{\beta}\right)'\left(Y - X\vec{\beta}\right) \\
&= \left(Y' - \hat{\beta}'X'\right)\left(Y - X\hat{\beta}\right) \\
&= Y'Y - Y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \\
&= Y'Y - 2YX'\hat{\beta}' + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}
\end{aligned}$$

فيكون لدينا:

$$\frac{\partial \hat{u}'\hat{u}}{\partial \hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0 \ \ldots\ldots (01)$$

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

ومنه يعطى مقدر شعاع المعالم كما يلي:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

حيث:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ . \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix}, X'X = \begin{pmatrix} n & \sum x_{1t} & \sum x_{2t} & \dots & \sum x_{kt} \\ \sum x_{1t} & \sum x_{1t}^2 & \sum x_{1t}x_{2t} & \dots & \sum x_{1t}x_{kt} \\ \sum x_{2t} & \sum x_{2t}x_{1t} & \sum x_{2t}^2 & \dots & \sum x_{2t}x_{kt} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_{kt} & \sum x_{kt}x_{1t} & \sum x_{kt}x_{2t} & \dots & \sum x_{kt}^2 \end{pmatrix}, X'Y = \begin{pmatrix} \sum y_t \\ \sum x_{1t}y_t \\ \sum x_{2t}y_t \\ \sum x_{kt}y_t \\ \sum x_{kt}y_t \end{pmatrix}$$

–الشرط الثاني:

الشرط الثاني للتدنية يكون محقق لأن المصفوفة $X'X$ نصف معرف إيجابا semi-positive definite matrix وبإعادة اشتقاق المعادلة رقم (01) أعلاه ينتج لدينا:

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}}\left[\frac{\partial\hat{u}'\hat{u}}{\partial\hat{\beta}}\right] = 2X'X$$

2–2–خصائص شعاع المقدرات:

2–2–1–توقع شعاع المقدرات $\hat{\beta}$: $\hat{\beta}$ مقدر غير متحيز لـ β لأن:

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= E[(X'X)^{-1}X'Y] = E[(X'X)^{-1}X'(X\beta + u)] \\ &= E[\beta + (X'X)^{-1}X'u] = \beta + (X'X)^{-1}X'E(u) = \beta \end{aligned}$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

2-2-2-مصفوفة تباين-تغاير لـ $\hat{\beta}$:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = E[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})]^2 = E(\hat{\beta} - \beta)^2 = E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)']$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = E[(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}]$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_u^2(X'X)^{-1}(X'X)(X'X)^{-1} = \sigma_u^2(X'X)^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_u^2(X'X)^{-1}$$

مثال تطبيقي:

بافتراض لديك المعطيات التالية أوجد مقدر شعاع المعالم:

$$X'X = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}, X'Y = \begin{pmatrix} 11.8 \\ 7.1 \\ 4.1 \end{pmatrix}, Y'Y = 19.34$$

-الحل:

-إيجاد مقدر شعاع المعالم: يعطى مقدر شعاع المعالم في ظل نموذج الانحدار الخطي المتعدد بالعلاقة التالية:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

2–إيجاد مقلوب مصفوفة $X'X$:

$$(X'X)^{-1} = \frac{adjX'X}{\det(X'X)} = \frac{coef'(X'X)}{\det(X'X)}$$

$$\det(X'X) = +10\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(X'X) = 10(49-1) - 2(14-2) + 2(2-14) = 480 - 24 - 24 = 432$$

$$\det(X'X) = 432$$

-حساب مصفوفة المعاملات $coef(X'X)$ كما يلي:

$$coef(X'X) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$coef(X'X) = \begin{pmatrix} 48 & -12 & -12 \\ -12 & 66 & -6 \\ -12 & -6 & 66 \end{pmatrix}$$

ومنقول مصفوفة المعاملات $coef'(X'X)$ هنا هي نفسها مصفوفة المعاملات $coef(X'X)$ لان المصفوفة مصفوفة $(X'X)$ متناظرة ومنه تكون مصفوفة المعاملات متناظرة كذلك:

$$\mathrm{coef}'(X'X) = \mathrm{coef}(X'X)$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{\mathrm{coef}'(X'X)}{\det(X'X)} = \frac{1}{\det(X'X)}\mathrm{coef}'(X'X) = \frac{1}{432}\begin{pmatrix} 48 & -12 & -12 \\ -12 & 66 & -6 \\ -12 & -6 & 66 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{48}{432} & -\frac{12}{432} & -\frac{12}{432} \\ -\frac{12}{432} & \frac{66}{432} & -\frac{6}{432} \\ -\frac{12}{432} & -\frac{6}{432} & \frac{66}{432} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.111 & -0.027 & -0.027 \\ -0.027 & 0.152 & 0.0138 \\ -0.0227 & 0.0138 & 0.152 \end{pmatrix}$$

بالتعويض في عبارة مقدر شعاع المعالم نجد ما يلي:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \frac{1}{432}\begin{pmatrix} 48 & -12 & -12 \\ -12 & 66 & -6 \\ -12 & -6 & 66 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11.8 \\ 7.1 \\ 4.1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{432}\begin{pmatrix} 432 \\ 302.4 \\ 86.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.7 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}_0 = 1, \qquad \hat{\beta}_1 = 0.7 \ , \hat{\beta}_2 = 0.7$$

المحور 3 : تقدير تباين الأخطاء ومصفوفة تباين-تغاير للمقدرات

نتطرق هنا إلى كيفية تقدير تباين الأخطاء ثم إلى كيفية إيجاد مصفوفة تباين–تغاير للمقدرات كما يلي:

3–1–تقدير تباين الأخطاء:

$$\begin{aligned}\hat{u} = y - X\hat{\beta} &= X\beta + u - X(X'X)^{-1}X'(X\beta + u)\\ &= X\beta + u - X\beta - X(X'X)^{-1}X'u\\ &= [I - X(X'X)^{-1}X']u = \mathrm{M}\mathrm{u}.\end{aligned}$$

حيث المصفوفة M لها مجموعة في الخصائص نوجزها في النقاط التالية:

–المصفوفة M متناظرة: أي أن: $M' = M$

- –المصفوفة M عديمة النمو: أي أن: $M^2 = M$

إذن يكون لدينا:

$$\hat{\mathrm{u}}'\hat{\mathrm{u}} = \mathrm{u}'\mathrm{M}'\mathrm{M}\mathrm{u} = \mathrm{u}'\mathrm{M}\mathrm{u}$$

$$\mathrm{E}(\hat{\mathrm{u}}'\hat{\mathrm{u}}) = \mathrm{E}(\mathrm{u}'\mathrm{M}\mathrm{u}) = \mathrm{E}(\mathrm{tr}\ \mathrm{u}'\mathrm{M}\mathrm{u})$$

لأن: $\mathrm{u}'\mathrm{M}\mathrm{u}$ عدد ثابت (is a scalar)

$$\mathrm{E}(\hat{\mathrm{u}}'\hat{\mathrm{u}}) = \mathrm{E}(\mathrm{tr}\ \mathrm{M}\mathrm{u}\mathrm{u}')$$

لأن:

$$\mathrm{trAB} = \mathrm{trBA}$$

$$\mathrm{E}(\hat{\mathrm{u}}'\hat{\mathrm{u}}) = \mathrm{E}(\mathrm{tr\ Muu}') = trE(Muu')\ since\ the\ trace\ is\ a\ sum$$

$$\mathrm{E}(\hat{\mathrm{u}}'\hat{\mathrm{u}}) = trME(uu')\ \ since\ \text{“}M\text{”}\ is\ non-random$$

$$\mathrm{E}(\hat{\mathrm{u}}'\hat{\mathrm{u}}) = trM(\sigma^2 I) = \sigma^2 tr(MI) = \sigma^2 \mathrm{trM}$$

$$\mathrm{trM} = \mathrm{tr}[\mathrm{I} - \mathrm{X}(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}'] = trI - tr\mathrm{X}(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}' = trI_n - trI_k$$

$$\mathrm{trM} = \mathrm{n} - \mathrm{k} - 1$$

$$\mathrm{E}(\hat{\mathrm{u}}'\hat{\mathrm{u}}) = \sigma^2 \mathrm{trM} = (\mathrm{n} - \mathrm{k})\sigma^2$$

حيث: k يمثل عدد المتغيرات المستقلة.

ومنه يعطى مقدر تباين الأخطاء في نموذج الانحدار الخطي المتعدد بالعلاقة التالية:

$$\hat{\sigma}^2_{u_t} = \frac{\hat{\mathrm{u}}'\hat{\mathrm{u}}}{n-k-1} = \frac{\sum \hat{u}^2}{n-k-1}$$

مثال تطبيقي: استخدام معطيات **المثال التطبيقي السابق** أوجد مقدر تباين الأخطاء؟

الحل:

1–مقدر تباين الأخطاء:

$$\hat{\sigma}^2_{u_t} = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-k-1}$$

حيث:

$$\hat{u}'\hat{u} = RSS = TSS - ESS$$

$$\hat{u}'\hat{u} = [Y'Y - n\bar{Y}^2] - [\hat{Y}'\hat{Y} - n\bar{Y}^2]$$

$$\hat{u}'\hat{u} = Y'Y - n\bar{Y}^2 - \hat{Y}'\hat{Y} + n\bar{Y}^2$$

$$\hat{u}'\hat{u} = Y'Y - \hat{Y}'\hat{Y}$$

نبحث عن $\hat{Y}'\hat{Y}$ إذ لدينا:

$$\hat{Y} = X\hat{\beta}$$

ومنه:

$$\hat{Y}' = \left(X\hat{\beta}\right)' = \hat{\beta}'X'$$

$$\hat{Y}'\hat{Y} = \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\hat{Y}'\hat{Y} = \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} = \hat{\beta}'X'X(X'X)^{-1}X'Y = \hat{\beta}'X'Y$$

$$X'X(X'X)^{-1} = I_n$$

$$\hat{Y}'\hat{Y} = \hat{\beta}'X'Y$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.7 \\ 0.2 \end{pmatrix} X'Y = \begin{pmatrix} 11.8 \\ 7.1 \\ 4.1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{Y}'\hat{Y} = (1 \quad 0.7 \quad 0.2)' \begin{pmatrix} 11.8 \\ 7.1 \\ 4.1 \end{pmatrix} = 11.8 + 0.7 \times 7.1 + 0.2 \times 4.1 = 17.59$$

$$\hat{Y}'\hat{Y} = 17.59$$

$$\hat{u}'\hat{u} = Y'Y - \hat{Y}'\hat{Y}$$

حيث لدينا مما سبق أن:

$$Y'Y = 19.34$$

$$\hat{u}'\hat{u} = 19.34 - 17.59 = 1.75$$

$$\hat{\sigma}^2_{u_t} = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-k-1} = \frac{1.75}{10-3} = 0.25$$

3-2-مصفوفة تباين-تغاير للمقدرات:

تعطي مصفوفة تباين-تغاير لشعاع معالم المقدرات بالعلاقة التالية:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_u^2 (X'X)^{-1} = \mathrm{diag}\,\hat{\sigma}_u^2 (X'X)^{-1} = \hat{\sigma}_u^2\,\mathrm{diag}(X'X)^{-1}$$

يتم حساب تباين مقدرات عن طريق ضرب قيمة مقدر تباين الأخطاء في عناصر قطر المصفوفة $(X'X)^{-1}$ أي:

$$var(\hat{\beta}) = \mathrm{diag}\,\hat{\sigma}_u^2 (X'X)^{-1} = \hat{\sigma}_u^2\,\mathrm{diag}(X'X)^{-1}$$

ومنه تباين كل معلمة يعطى كما يلي:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_i} = \hat{\sigma}_u^2 \times a_{i+1}$$

حيث: a_{i+1}**:** هو العنصر رقم i الموجود بقطر المصفوفة $(X'X)^{-1}$

المحور 4 : القدرة التفسيرية للنموذج

1- معامل التحديد: كما تم الاشارة إليه في السابق فإن معامل التحديد يقوم بمقياس نسبة التباين الكلي المفسرة من خلال النموذج المقدر ويتم حسابه كما تم التطرق اليه في السابق بالعلاقة التالية مع الإشارة هنا لدينا k متغير مفسر في نموذج الانحدار.

$$TSS = ESS + RSS$$

حيث:

$$TSS = \sum(Y - \bar{Y})^2 = \sum Y^2 - \frac{(i'Y)^2}{n} = Y'Y - \frac{(i'Y)^2}{n}$$

$$ESS = \sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2 = \sum\hat{Y}^2 - \frac{(i'Y)^2}{n} = \hat{Y}'\hat{Y} - \frac{(i'Y)^2}{n} = (X\hat{\beta})'(X\hat{\beta}) - \frac{(i'Y)^2}{n}$$

$$ESS = \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} - \frac{(i'Y)^2}{n} = \hat{\beta}'X'Y - \frac{(i'Y)^2}{n}$$

أي:

$$\left[Y'Y - \frac{(i'Y)^2}{n}\right] = \left[\hat{\beta}'X'Y - \frac{(i'Y)^2}{n}\right] + \hat{u}'\hat{u}$$

يعطى معامل التحديد بالعلاقة التالية:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = \frac{\hat{\beta}'X'Y - \frac{(i'Y)^2}{n}}{Y'Y - \frac{(i'Y)^2}{n}} = 1 - \frac{\hat{u}'\hat{u}}{Y'Y - \frac{(i'Y)^2}{n}}$$

2– معامل التحديد المصحح : في معامل التحديد المصحح معنى كلمة 'مصحح' أي أنها مصححة وفقا لدرجات الحرية المتعلقة بمجموع المربعات الداخلة في العلاقة أدناه :

$$\bar{R}^2 = \frac{ESS/ddl_{ESS}}{TSS/ddl_{TSS}} = 1 - \frac{RSS/ddl_{RSS}}{TSS/ddl_{TSS}}$$

$$\bar{R}^2 = \frac{ESS/(k+1)}{TSS/(n-1)} = 1 - \frac{RSS/(n-k-1)}{TSS/(n-1)}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} \cdot \frac{(n-1)}{(n-k-1)}$$

حيث: إذ أن: RSS: لها درجة حرية (n-k-1) في نموذج يحتوي على k متغير مفسر بالإضافة إلى الحد الثابت.

وTSS: له درجة حرية (n-1).

كما يمكن كتابة معامل التحديد المصحح بواسطة معامل التحديد كما يلي:

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

$$\frac{RSS}{TSS} = 1 - R^2$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} \cdot \frac{(n-1)}{(n-k-1)}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\frac{(n-1)}{(n-k-1)}$$

حيث: n: تمثل حجم العينة، k+1: تمثل عدد المعالم المقدرة.

كما يمكن كتابته كما يلي:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{(n-1)}{(n-k-1)} + \frac{(n-1)}{(n-k-1)}R^2$$

$$\bar{R}^2 = \frac{(n-1)}{(n-k-1)}R^2 - \frac{k+1-n+n-1}{n-k-1}$$

$$\bar{R}^2 = \frac{(n-1)}{(n-k-1)}R^2 - \frac{k}{n-k-1}$$

ملاحظة:

- نلاحظ أن: $R^2 > \bar{R}^2$: إذا كانت $k > 1$
- نلاحظ أنه عندما يكون عدد المشاهدات n كبير نسبيا فإن R^2 يؤول إلى $\bar{R}^2$

$$\bar{R}^2 = \frac{(n-1)}{(n-k-1)}R^2 - \frac{k}{n-k-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{R}^2 = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{(n-1)}{(n-k-1)}(1-R^2)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{R}^2 = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)}{(n-k-1)}(1-R^2) = R^2$$

- مما سبق يتضح أنه إذا كان:
- حجم العينة كبير بقدر ما يمكن فإن قيمة معامل التحديد المصحح تقترب من قيمة معامل التحديد.
- عدد المتغيرات المستقلة كبيرة مقارنة بحجم العينة فإن قيمة معامل التحديد المصحح تقل بكثير عن قيمة معامل التحديد. ويمكن أن يأخذ قيما سالبة (في هذه الحالة يتم شرحه على اساس أن قيمته تساوي صفر)

المحور 5 : اختبار المعنوية الإحصائية للمعالم

من فرضية طبيعية الأخطاء التي تطرقنا إليها في السابق والتي تنص على أن:

$$u_t \sim N(0, \sigma^2 I_n)$$

ومنه تكون معالم النموذج تتبع التوزيع الطبيعي كما يلي:

$$\hat{\beta}_i \sim N\left(\beta_i, \hat{\sigma}^2_{\hat{u}} a_{i+1}\right) \quad i = \overline{0,k}$$

حيث: a_{i+1} هو العنصر رقم i الموجود بقطر المصفوفة $(X'X)^{-1}$

ومنه:

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma_{\hat{\beta}_i}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma_u \sqrt{a_{i+1}}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}_{\hat{u}} \sqrt{a_{i+1}}} \sim T_{n-k}^{\alpha/2}$$

حيث: kيمثل عدد معالم النموذج.

ملاحظة: في حالة حجم العينة كبير بقدر ما يمكن يصبح:

وهذا ما يسمح لنا بأجراء اختبار الفرضيات الموضوعة حول معالم النموذج وبناء مجالات الثقة للمعالم المجتمع كما يلي:

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}_{\hat{u}} \sqrt{a_{i+1}}} \sim N(0,1)$$

1–اختبار ثنائي: تعطى فرضيات الاختبار في حالة الاختبار الثنائي كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \beta_i = b \\ H_1: \beta_i \neq b \end{cases}$$

حيث: $b \in R$

ومن خلال حساب إحصائية الاختبار (T_{cal}) التالي:

$$T_{cal} = \frac{|\hat{\beta}_i - \beta_i|}{\hat{\sigma}_{\hat{u}}\sqrt{a_{i+1}}} = \frac{|\hat{\beta}_i - b|}{\hat{\sigma}_{\hat{u}}\sqrt{a_{i+1}}}$$

ومقارنتها بقيمتها الجدولية (T_{tab}) عند مستوى معنوية α ودرجة حرية $(n-k)$

القرار: نرفض فرضية العدم إذا كان:

$$T_{cal} > T_{tab} = T_{n-k}^{\alpha/2}$$

وكحالة خاصة إذا كانت فرضية العدم $[H_0: \beta_i = 0]$ مقابل الفرضية البديلة $[H_1: \beta_i \neq 0]$ فإن إحصائية الاختبار تكون كالتالي:

$$T_{cal} = \frac{|\hat{\beta}_i|}{\hat{\sigma}_{\hat{u}}\sqrt{a_{i+1}}}$$

في هذه الحالة إذا تم قبول فرضية العدم فإننا نقول أن المتغير المستقل (X_i) المرفق بالمعلمة β_i لا يؤثر على المتغير التابع

2-اختبار أحادي من اليمين: تعطى فرضيات الاختبار في حالة الاختبار الأحادي من اليمين كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \beta_i = b \\ H_1: \beta_i > b \end{cases}$$

ومن خلال حساب إحصائية الاختبار (T_{cal}) التالي:

$$T_{cal} = \frac{\hat{\beta}_i - b}{\hat{\sigma}_{\hat{u}}\sqrt{a_{i+1}}}$$

ومقارنتها بقيمتها الجدولية (T_{tab}) عند مستوى معنوية 2α ودرجة حرية $(n-k)$

نرفض فرضية العدم إذا كان: $T_{cal} > T_{tab} = T^{\alpha}_{n-k-1}$

ونقول أن المعلمة β_i معنويا أكبر من القيمة الحقيقية b

3-اختبار أحادي من اليسار: تعطى فرضيات الاختبار في حالة الاختبار الأحادي من اليسار كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \beta_i = b \\ H_1: \beta_i < b \end{cases}$$

ومن خلال حساب إحصائية الاختبار (T_{cal}) التالي:

$$T_{cal} = \frac{\hat{\beta}_i - b}{\hat{\sigma}_{\hat{u}}\sqrt{a_{i+1}}}$$

ومقارنتها بقيمتها الجدولية $(-T_{tab})$ عند مستوى معنوية 2α ودرجة حرية $(n-k-1)$

نرفض فرضية العدم إذا كانت: (بالتناظر)

$$|T_{cal}| > T_{tab}$$

نقول أن المعلمة β_i معنويا أقل من القيمة الحقيقية b

أو نقوم بقبول فرضية العدم إذا كانت:

$$T_{cal} < -T_{tab}$$

مثال تطبيقي: استخدام معطيات **المثال 01** اختبر الفرضيات التالية؟ $(\alpha = 0.05)$

$$1-\begin{cases}H_0\colon \beta_0 = 2\\ H_1\colon \beta_0 \neq 2\end{cases} \qquad 2-\begin{cases}H_0\colon \beta_1 = 1\\ H_1\colon \beta_1 > 1\end{cases} \qquad 3-\begin{cases}H_0\colon \beta_2 = 0.1\\ H_1\colon \beta_2 < 0.1\end{cases}$$

الحل:

1− هذا المثال عبارة عن اختبار ثنائي: نحسب إحصائية الاختبار ونقارنها بقيمتها الجدولية كما يلي:

$$1-\begin{cases}H_0\colon \beta_0 = 2\\ H_1\colon \beta_0 \neq 2\end{cases}$$

$$T_{cal} = \frac{\hat{\beta}_0 - b}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} = \frac{1-2}{\sqrt{0.0277}} = -6.009$$

$$T_{tab} = T_{n-k-1}^{\alpha/2} = T_{10-2-1}^{0.05/2} = T_7^{0.05/2} = 2.365$$

$$T_{cal} = -6.009 < 2.365$$

ومنه نقبل فرضية العدم ونرفض الفرضية البديلة

2– مثال ثاني عبارة عن اختبار أحادي من اليمين: نحسب إحصائية الاختبار التالي:

$$2-\begin{cases}H_0:\beta_1=1\\H_1:\beta_1>1\end{cases}$$

$$T_{cal}=\frac{\hat{\beta}_1-b}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}=\frac{0.7-1}{\sqrt{0.038}}=-1.5392$$

$$T_{tab}=T_{n-k-1}^{2\alpha}=T_7^{10}=1.895$$

نقبل فرضية العدم لأن: $T_{cal}=-1.5392<T_{tab}=1.895$

3–اختبار أحادي من اليسار: نحسب إحصائية الاختبار التالي:

$$3-\begin{cases}H_0:\beta_2=0.1\\H_1:\beta_2<0.1\end{cases}$$

$$T_{cal}=\frac{\hat{\beta}_2-b}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}}=\frac{0.2-0.1}{\sqrt{0.038}}=0.513$$

$$T_{tab}=-T_{n-k-1}^{2\alpha}=-T_7^{10}=-1.895$$

نقوم بقبول فرضية العدم لأن: $T_{cal}=0.513>-T_{tab}=-1.895$

المحور 6 : اختبار المعنوية الكلية للنموذج وجدول تحليل التباين

يمكن اختبار المعنوية الكلية للنموذج باستخدام نسبة التباين المفسر إلى نسبة التباين غير مفسر، إذ تتبع هذه النسبة توزيع فيشر F بدرجة حرية k و n-k-1 وتعطى فرضيات الاختبار كما يلي:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k \\ \exists H_1 : \beta_i \neq 0 \end{cases}$$

وتعطى إحصائية الاختبار بالعلاقة التالية:

$$F = \frac{ESS/k}{RSS/(n-k-1)} = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)}$$

ونقارنها بقيمتها الجدولية F بدرجة حرية $v_1 = k$ و $v_2 = n - k - 1$

إذا كان:

$$F = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} > F^{\alpha}_{k,n-k-1}$$

نقوم برفض فرضية العدم وقبول الفرضية البديلة أي أن النموذج معنوي كليا

ويعطى جدول تحليل التباين كما يلي:

متوسط المربعات	درجات الحرية	مجموع المربعات	مصدر التغيير
ESS/k	k	$ESS = \hat{Y}'\hat{Y} - n\bar{Y}^2$	$X_1 = X_2 = \cdots = X_k$
$RSS/(n-k-1)$	$n-k-1$	$RSS = \hat{u}'\hat{u}$	البواقي
$TSS/(n-1)$	$n-1$	$TSS = Y'Y - n\bar{Y}^2$	الكلي

مثال تطبيقي: استخدام معطيات **المثال 01** اختبر الفرضية التالية وكون جدول تحليلي التباين؟ $(\alpha = 0.05)$

$$\begin{cases} H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0 \\ \exists H_1 : \beta_i \neq 0 \quad i = \overline{1,2} \end{cases}$$

الحل: لاختبار الفرضية اعلاه نقوم بحساب احصائية الاختبار التالية:

$$F = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} > F^{\alpha}_{k,n-k-1}$$

ومن نتائج المثال 01 وجدنا قيمة معامل التحديد تساوي:

$$R^2 = 0.6768$$

ومنه:

$$F_{cal} = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} = \frac{0,6768/2}{(1-0,6768)/(10-2-1)} = 7,33$$

$$F^{\alpha}_{k,n-k-1} = F^{0.05}_{2,7} = 4.74$$

$$F_{cal} = 7,33 > F^{0.05}_{2,7} = 4.74$$

جدول تحليلي التباين: من خلال نتائج السابقة يمكن تلخيص ذلك فيما يلي:

مصدر التغيير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات
X_1, X_2	$ESS = 3.666$	2	$\frac{ESS}{k} = \frac{3.666}{2} = 1,833$
البواقي	$RSS = 1,75$	7	$\frac{RSS}{(n-k-1)} = \frac{1,75}{7} = 0,25$
الكلي	$TSS = 5.416$	9	$\frac{TSS}{n-1} = \frac{5.416}{9} = 0,601$

قائمة المراجع

1. خالد محمد السواعي، **أساسيات الاقتصاد القياسي باستخدام Eviews**، دار الكتاب الثقافي للطباعة والنشر والتوزيع، الأردن، 2012.
2. حمد شيخي، **طرق الاقتصاد القياسي محاضرات وتطبيقات**، دار حامد للنشر والتوزيع، الأردن، الطبعة الثانية، 2011.
3. عدنان داود محمد العذاري، **الاقتصاد القياسي نظرية وحلول**،، دار جرير للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2010.
4. عبد المحمود محمد عبد الرحمن، **مقدمة في الاقتصاد القياسي**، عمادة شؤون المكتبات، جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية، الطبعة الأولى، 1996.
5. Régis Bourbonnais, **Économétrie Cours et exercices corrigés**, 9e édition Dunod, Paris 2015.
6. Philippe Deschamps, **Cours d'économétrie**, université de Fribourg, Suisse 2006, P :47.
7. Dimitrios Asteriou and Stephen G. Hall**, Applied Econometrics,** 4th Edition This edition published 2021 by RED GLOBE PRESS.
8. Prasanna Sahoo, **Probability and Mathematical Statistics**, University of Louisville, Louisville, KY 40292 USA, 24 August 2015.
9. DAMODAR GUJARATI, **ECONOMETRICS BY EXAMPLE**, Published by PALGRAVE, London, Second edition, 2015.

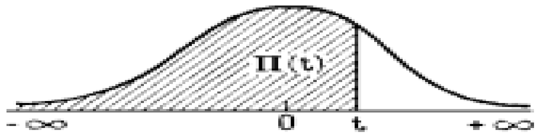
قائمة المراجع

1. CHARLES B. MOSS, **MATHEMATICAL STATISTICS FOR APPLIED ECONOMETRICS**, CRC Press, 2015.
2. Alvin C. Rencher and G. Bruce Schaalje, **LINEAR MODELS IN STATISTICS**, Wiley-interscience, Canada, Second Edition, 2007.
3. A. C. Davison, **Statistical models**, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, New York, 2008.
4. Nlandu Mamingi, **Theoretical and Empirical Exercises in ECONOMETRICS**, The University of the West Indies Press, 2005.
5. James H. Stock and Mark W. Watson, **Introduction to Econometrics,** Pearson, Fourth edition, 2020.
6. PETER SCHMIDT, **ECONOMETRICS**, CRC Press Taylor & Francis Group, 2019.
7. William H.Greene, **Econometric Analysis**, New York, Pearson, Eighth Edition, 2018.

الجداول الاحصائية

1. TABLE DE LA LOI DE LAPLACE-GAUSS

(Probabilité de trouver une valeur inférieure à x)



$$\pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-t^2/2}\, dt \ .$$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE X

x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$F(x)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota. — La table donne les valeurs de $F(x)$ pour x positif. Lorsque x est négatif, il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

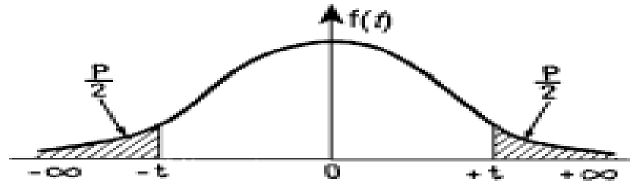
Exemples : pour $x = 1,37 \quad F(x) = 0,9147$

pour $x = -1,37 \quad F(x) = 0,0853$

الجداول الاحصائية

2. TABLE DE LA LOI DE STUDENT

Valeurs de T ayant la probabilité P d'être dépassées en valeur absolue



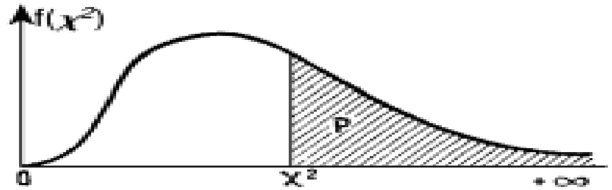
ν	P = 0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	0,12566	0,25335	0,38532	0,52440	0,67449	0,84162	1,03643	1,28155	1,64485	1,95996	2,32634	2,57582

Nota. — ν est le nombre de degrés de liberté.

الجداول الاحصائية

3. TABLE DE LA LOI DU CHI-DEUX

Valeurs de χ^2 ayant la probabilité P d'être dépassées



ν	$P = 0{,}90$	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,662	18,475
8	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Lorsque $\nu > 30$, on peut admettre que la quantité $\sqrt{2\,\chi^2} - \sqrt{2\,\nu - 1}$ suit la loi normale réduite.

Exemple :

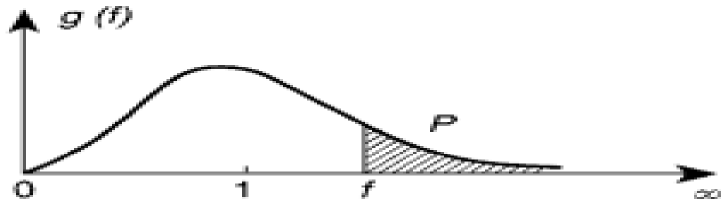
Calculez la valeur de χ^2 correspondant à une probabilité $P = 0{,}10$ de dépassement lorsque $\nu = 41$. À l'aide de la table 1, on calcule, pour $P = 0{,}10$, $x = 1{,}2816$.

D'où : $\chi^2 = \dfrac{[x + \sqrt{2\,\nu - 1}]^2}{2} = \dfrac{1}{2}[1{,}2816 + \sqrt{82 - 1}]^2 = \dfrac{1}{2}(10{,}2816)^2 = 52{,}85.$

الجداول الاحصائية

4. TABLE DE LA LOI DE FISHER-SNEDECOR

Valeurs de F ayant la probabilité P d'être dépassées ($F = s_1^2/s_2^2$)



ν_2	$\nu_1 = 1$		$\nu_1 = 2$		$\nu_1 = 3$		$\nu_1 = 4$		$\nu_1 = 5$	
	$P = 0{,}05$	$P = 0{,}01$	$P = 0{,}05$	$P = 0{,}01$	$P = 0{,}05$	$P = 0{,}01$	$P = 0{,}05$	$P = 0{,}01$	$P = 0{,}05$	$P = 0{,}01$
1	161,4	4 052	199,5	4 999	215,7	5 403	224,6	5 625	230,2	5 764
2	18,51	98,49	19,00	99,00	19,16	99,17	19,25	99,25	19,30	99,30
3	10,13	34,12	9,55	30,81	9,28	29,46	9,12	28,71	9,01	28,24
4	7,71	21,20	6,94	18,00	6,59	16,69	6,39	15,98	6,26	15,52
5	6,61	16,26	5,79	13,27	5,41	12,06	5,19	11,39	5,05	10,97
6	5,99	13,74	5,14	10,91	4,76	9,78	4,53	9,15	4,39	8,75
7	5,59	12,25	4,74	9,55	4,35	8,45	4,12	7,85	3,97	7,45
8	5,32	11,26	4,46	8,65	4,07	7,59	3,84	7,01	3,69	6,63
9	5,12	10,56	4,26	8,02	3,86	6,99	3,63	6,42	3,48	6,06
10	4,96	10,04	4,10	7,56	3,71	6,55	3,48	5,99	3,33	5,64
11	4,84	9,65	3,98	7,20	3,59	6,22	3,36	5,67	3,20	5,32
12	4,75	9,33	3,88	6,93	3,49	5,95	3,26	5,41	3,11	5,06
13	4,67	9,07	3,80	6,70	3,41	5,74	3,18	5,20	3,02	4,86
14	4,60	8,86	3,74	6,51	3,34	5,56	3,11	5,03	2,96	4,69
15	4,54	8,68	3,68	6,36	3,29	5,42	3,06	4,89	2,90	4,56
16	4,49	8,53	3,63	6,23	3,24	5,29	3,01	4,77	2,85	4,44
17	4,45	8,40	3,59	6,11	3,20	5,18	2,96	4,67	2,81	4,34
18	4,41	8,28	3,55	6,01	3,16	5,09	2,93	4,58	2,77	4,25
19	4,38	8,18	3,52	5,93	3,13	5,01	2,90	4,50	2,74	4,17
20	4,35	8,10	3,49	5,85	3,10	4,94	2,87	4,43	2,71	4,10
21	4,32	8,02	3,47	5,78	3,07	4,87	2,84	4,37	2,68	4,04
22	4,30	7,94	3,44	5,72	3,05	4,82	2,82	4,31	2,66	3,99
23	4,28	7,88	3,42	5,66	3,03	4,76	2,80	4,26	2,64	3,94
24	4,26	7,82	3,40	5,61	3,01	4,72	2,78	4,22	2,62	3,90
25	4,24	7,77	3,38	5,57	2,99	4,68	2,76	4,18	2,60	3,86
26	4,22	7,72	3,37	5,53	2,98	4,64	2,74	4,14	2,59	3,82
27	4,21	7,68	3,35	5,49	2,96	4,60	2,73	4,11	2,57	3,78
28	4,20	7,64	3,34	5,45	2,95	4,57	2,71	4,07	2,56	3,75
29	4,18	7,60	3,33	5,42	2,93	4,54	2,70	4,04	2,54	3,73
30	4,17	7,56	3,32	5,39	2,92	4,51	2,69	4,02	2,53	3,70
40	4,08	7,31	3,23	5,18	2,84	4,31	2,61	3,83	2,45	3,51
60	4,00	7,08	3,15	4,98	2,76	4,13	2,52	3,65	2,37	3,34
120	3,92	6,85	3,07	4,79	2,68	3,95	2,45	3,48	2,29	3,17
∞	3,84	6,64	2,99	4,60	2,60	3,78	2,37	3,32	2,21	3,02

Nota. — s_1^2 est la plus grande des deux variances estimées, avec ν_1 degrés de liberté.