Chapitre 1

Analyse vectorielle

1. Espaces vectoriels, bases et dimensions finies

La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan, et aussi multiplier un vecteur par un réel (pour l'agrandir ou le rétrécir). Mais on peut aussi additionner deux fonctions, ou multiplier une fonction par un réel. Même chose avec les polynômes, les matrices,... Le but est d'obtenir des théorèmes généraux qui s'appliqueront aussi bien aux vecteurs du plan, de l'espace, aux espaces de fonctions, aux polynômes, aux matrices,... La contrepartie de cette grande généralité de situations est que la notion d'espace vectoriel est difficile à appréhender et vous demandera une quantité conséquente de travail ! Il est bon d'avoir d'abord étudié le chapitre « L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ».

1. Espace vectoriel

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps. Dans la plupart des exemples, ce sera le corps des réels $\mathbb{R}$.

1.1. Définition d'un espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble formé de vecteurs, de sorte que l'on puisse additionner (et soustraire) deux vecteurs u, v pour en former un troisième $u+v$ (ou $u-v$) et aussi afin que l'on puisse multiplier chaque vecteur u d'un facteur λ pour obtenir un vecteur $\lambda \cdot u$. Voici la définition formelle :

> **Définition**
> Un *$\mathbb{K}$-espace vectoriel* est un ensemble non vide E muni :
> - d'une loi de composition interne, c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E :
>
> $$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (u, v) & \mapsto & u+v \end{array}$$

- d'une loi de composition externe, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

1. $u + v = v + u \quad$ (pour tous $u, v \in E$)
2. $u + (v + w) = (u + v) + w \quad$ (pour tous $u, v, w \in E$)
3. Il existe un ***élément neutre*** $0_E \in E$ tel que $u + 0_E = u \quad$ (pour tout $u \in E$)
4. Tout $u \in E$ admet un ***symétrique*** u' tel que $u + u' = 0_E$. Cet élément u' est noté $-u$.
5. $1 \cdot u = u \quad$ (pour tout $u \in E$)
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u \quad$ (pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$)
7. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \quad$ (pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $u, v \in E$)
8. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u \quad$ (pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$)

Nous reviendrons en détail sur chacune de ces propriétés juste après des exemples.

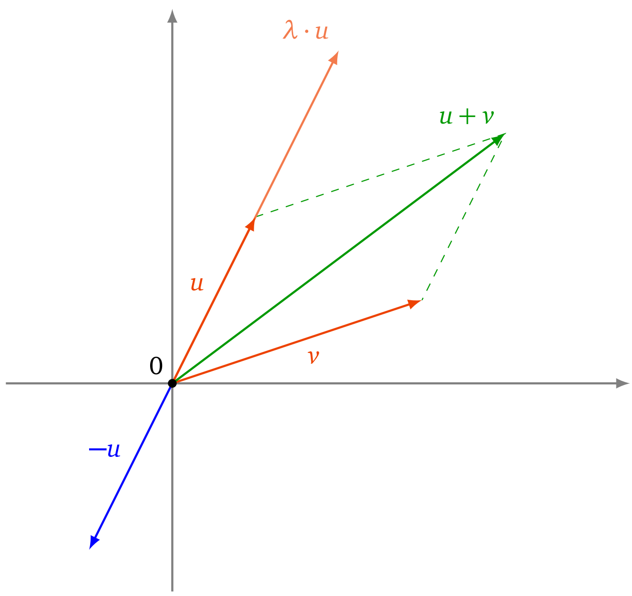
1.2. Premiers exemples

Exemple (Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$).
Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. Un élément $u \in E$ est donc un couple (x, y) avec x élément de $\mathbb{R}$ et y élément de $\mathbb{R}$. Ceci s'écrit

$$\mathbb{R}^2 = \big\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\big\}.$$

- *Définition de la loi interne.* Si (x, y) et (x', y') sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$, alors :
$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$
- *Définition de la loi externe.* Si λ est un réel et (x, y) est un élément de $\mathbb{R}^2$, alors :
$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0)$. Le symétrique de (x, y) est $(-x, -y)$, que l'on note aussi $-(x, y)$.



1.3. Terminologie et notations

Rassemblons les définitions déjà vues.

- On appelle les éléments de E des ***vecteurs***. Au lieu de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on dit aussi espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés des ***scalaires***.
- L'***élément neutre*** 0_E s'appelle aussi le ***vecteur nul***. Il ne doit pas être confondu avec l'élément 0 de $\mathbb{K}$. Lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion, 0_E sera aussi noté 0.
- Le ***symétrique*** $-u$ d'un vecteur $u \in E$ s'appelle aussi l'***opposé***.
- La loi de composition interne sur E (notée usuellement $+$) est appelée couramment l'addition et $u+u'$ est appelée somme des vecteurs u et u'.
- La loi de composition externe sur E est appelée couramment multiplication par un scalaire. La multiplication du vecteur u par le scalaire λ sera souvent notée simplement λu, au lieu de $\lambda \cdot u$.

Somme de n vecteurs. Il est possible de définir, par récurrence, l'addition de n vecteurs, $n \geqslant 2$. La structure d'espace vectoriel permet de définir l'addition de deux vecteurs (et initialise le processus). Si maintenant la somme de $n-1$ vecteurs est définie, alors la somme de n vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$ est définie par

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = (v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}) + v_n.$$

L'associativité de la loi $+$ nous permet de ne pas mettre de parenthèses dans la somme $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. On notera $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \sum_{i=1}^{n} v_i$.

1.4. Règles de calcul

Proposition

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on a :

1. $0 \cdot u = 0_E$
2. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $(-1) \cdot u = -u$
4. $\boxed{\lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0 \ \text{ ou } \ u = 0_E}$

L'opération qui à (u, v) associe $u + (-v)$ s'appelle la ***soustraction***. Le vecteur $u + (-v)$ est noté $u - v$. Les propriétés suivantes sont satisfaites : $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$ et $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$.

2. Famille libre

2.1. Combinaison linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition

Soient $v_1, v_2, \dots, v_p$, $p \geqslant 1$ vecteurs d'un espace vectoriel E. Tout vecteur de la forme

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p$$

(où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont des éléments de $\mathbb{K}$) est appelé ***combinaison linéaire*** des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_p$. Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont appelés ***coefficients*** de la combinaison linéaire.

2.2. Définition

Définition
Une famille $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de E est une ***famille libre*** ou ***linéairement indépendante*** si toute combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \dots \quad \lambda_p = 0.$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls, on dit que la famille est ***liée*** ou ***linéairement dépendante***. Une telle combinaison linéaire s'appelle alors une ***relation de dépendance linéaire*** entre les v_j.

2.3. Premiers exemples

Pour des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, décider si une famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est libre ou liée revient à résoudre un système linéaire.

Exemple
Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, considérons la famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On souhaite déterminer si elle est libre ou liée. On cherche des scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tels que

$$\lambda_1 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) + \lambda_2 \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{smallmatrix}\right) + \lambda_3 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

On calcule que ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ce système a une infinité de solutions et en prenant par exemple $\lambda_3 = 1$ on obtient $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$, ce qui fait que

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est donc une famille liée.

Exemple
Soient $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. Est-ce que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre ou liée ? Résolvons le système linéaire correspondant à l'équation $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On résout ce système et on trouve comme seule solution $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est donc une famille libre.

Exemple
Soient $v_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\3\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\5\\-1\end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix}7\\-1\\5\\8\end{pmatrix}$. Alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une famille liée, car

$$3v_1 + v_2 - v_3 = 0.$$

2.4. Famille liée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $v \neq 0$, la famille à un seul vecteur $\{v\}$ est libre (et liée si $v = 0$). Considérons le cas particulier d'une famille de deux vecteurs.

> **Proposition**
> *La famille $\{v_1, v_2\}$ est liée si et seulement si v_1 est un multiple de v_2 ou v_2 est un multiple de v_1.*

Ce qui se reformule ainsi par contraposition : « La famille $\{v_1, v_2\}$ est libre si et seulement si v_1 n'est pas un multiple de v_2 et v_2 n'est pas un multiple de v_1. »

3. Famille génératrice

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

3.1. Définition

> **Définition**
> Soient $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E. La famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une ***famille génératrice*** de l'espace vectoriel E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \dots, v_p$.
> Ce qui peut s'écrire aussi :
> $$\forall v \in E \qquad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \qquad v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$

On dit aussi que la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ ***engendre*** l'espace vectoriel E.
Cette notion est bien sûr liée à la notion de sous-espace vectoriel engendré : les vecteurs $\{v_1, \dots, v_p\}$ forment une famille génératrice de E si et seulement si $E = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.

3.2. Exemples

Exemple
Considérons par exemple les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ de $E = \mathbb{R}^3$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice car tout vecteur $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Les coefficients sont ici $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = y$, $\lambda_3 = z$.

Exemple
Soient maintenant les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ de $E = \mathbb{R}^3$. Les vecteurs $\{v_1, v_2\}$ *ne forment pas* une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Par exemple, le vecteur $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas dans $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. En effet, si c'était le cas, alors il existerait $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. Ce qui s'écrirait aussi $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, d'où le système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 0 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution. (La première et la dernière ligne impliquent $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$, ce qui est incompatible avec la deuxième.)

Exemple
Soit $E = \mathbb{R}^2$.

- Soient $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La famille $\{v_1, v_2\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ car tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ se décompose comme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Soient maintenant $v_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $\{v_1', v_2'\}$ est aussi une famille génératrice. En effet, soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$. Montrer que v est combinaison linéaire de v_1' et v_2' revient à démontrer l'existence de deux réels λ et μ tels que $v = \lambda v_1' + \mu v_2'$. Il s'agit donc d'étudier l'existence de solutions au système :

  $$\begin{cases} 2\lambda + \mu & = & x \\ \lambda + \mu & = & y \end{cases}$$

  Il a pour solution $\lambda = x - y$ et $\mu = -x + 2y$, et ceci, quels que soient les réels x et y.

Ceci prouve qu'il peut exister plusieurs familles finies différentes, non incluses les unes dans les autres, engendrant le même espace vectoriel.

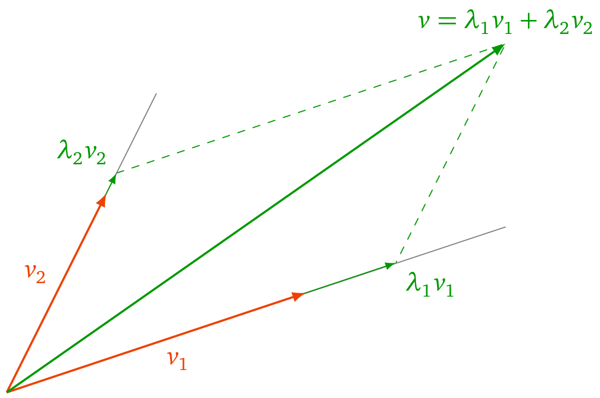
3.3. Liens entre familles génératrices

La proposition suivante est souvent utile :

> **Proposition**
> *Soit $\mathscr{F} = \left\{v_1, v_2, \ldots, v_p\right\}$ une famille génératrice de E. Alors $\mathscr{F}' = \left\{v_1', v_2', \ldots, v_q'\right\}$ est aussi une famille génératrice de E si et seulement si tout vecteur de $\mathscr{F}$ est une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{F}'$.*

4. Base

La notion de base généralise la notion de repère. Dans $\mathbb{R}^2$, un repère est donné par un couple de vecteurs non colinéaires. Dans $\mathbb{R}^3$, un repère est donné par un triplet de vecteurs non coplanaires. Dans un repère, un vecteur se décompose suivant les vecteurs d'une base. Il en sera de même pour une base d'un espace vectoriel.



4.1. Définition

Définition (Base d'un espace vectoriel).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est une ***base*** de E si $\mathscr{B}$ est une famille libre ***et*** génératrice.

Théorème
Soit $\mathscr{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de l'espace vectoriel E. Tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{B}$. Autrement dit, il **existe** *des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$* **uniques** *tels que :*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Remarque.

1. $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ s'appellent les ***coordonnées*** du vecteur v dans la base $\mathscr{B}$.
2. Il faut observer que pour une base $\mathscr{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ on introduit un ***ordre*** sur les vecteurs. Bien sûr, si on permutait les vecteurs on obtiendrait toujours une base, mais il faudrait aussi permuter les coordonnées.
3. Notez que l'application

$$\begin{array}{rcl} \phi & : & \mathbb{K}^n \rightarrow E \\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) & \mapsto & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \end{array}$$

est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ vers l'espace vectoriel E.

Preuve du théorème 2.

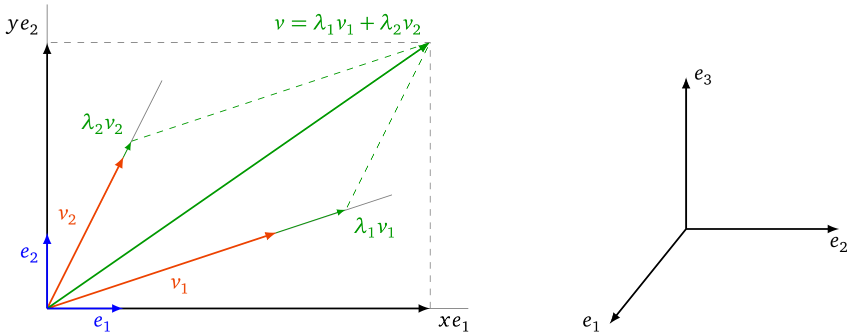
- Par définition, $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de E, donc pour tout $v \in E$ il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que
$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$
Cela prouve la partie existence.
- Il reste à montrer l'unicité des $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$ d'autres scalaires tels que $v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n$. Alors, par différence on a : $(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + (\lambda_2 - \mu_2)v_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0$. Comme $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est une famille libre, ceci implique $\lambda_1 - \mu_1 = 0, \quad \lambda_2 - \mu_2 = 0, \quad \ldots, \quad \lambda_n - \mu_n = 0$ et donc $\lambda_1 = \mu_1, \quad \lambda_2 = \mu_2, \quad \ldots, \lambda_n = \mu_n$.

$\square$

4.2. Exemples

Exemple

1. Soient les vecteurs $e_1 = \binom{1}{0}$ et $e_2 = \binom{0}{1}$. Alors (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, appelée ***base canonique*** de $\mathbb{R}^2$.
2. Soient les vecteurs $v_1 = \binom{3}{1}$ et $v_2 = \binom{1}{2}$. Alors (v_1, v_2) forment aussi une base de $\mathbb{R}^2$.



3. De même dans $\mathbb{R}^3$, si $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, alors (e_1, e_2, e_3) forment la ***base canonique*** de $\mathbb{R}^3$.

Exemple

Soient $v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix}2\\9\\0\end{smallmatrix}\right)$ et $v_3 = \left(\begin{smallmatrix}3\\3\\4\end{smallmatrix}\right)$. Montrons que la famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Dans les deux premiers points, nous ramenons le problème à l'étude d'un système linéaire.

1. Montrons d'abord que $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Soit $v = \left(\begin{smallmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{smallmatrix}\right)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que
$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3.$$
Ceci se reformule comme suit :
$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\9\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3\\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 3\lambda_3\\ \lambda_1 + 4\lambda_3\end{pmatrix}.$$
Ceci conduit au système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & a_1\\ 2\lambda_1 & + & 9\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & a_2\\ \lambda_1 & & & + & 4\lambda_3 & = & a_3. \end{array}\right. \tag{S}$$
Il nous restera à montrer que ce système a une solution $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

2. Pour montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre, il faut montrer que l'unique solution de
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$
est
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$
Ceci équivaut à montrer que le système
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0\\ 2\lambda_1 & + & 9\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & & & + & 4\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \tag{S'}$$
a une unique solution
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

4.3. Existence d'une base

Voyons maintenant un théorème d'existence d'une base finie. Dans la suite, les espaces vectoriels sont supposés non réduits à $\{0\}$.

> **Théorème** (Théorème d'existence d'une base).
> *Tout espace vectoriel admettant une famille finie génératrice admet une base.*

5. Dimension d'un espace vectoriel

5.1. Définition

Définition
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E admettant une base ayant un nombre fini d'éléments est dit de ***dimension finie***.

Par le théorème 3 d'existence d'une base, c'est équivalent à l'existence d'une famille finie génératrice.
On va pouvoir parler de ***la*** dimension d'un espace vectoriel grâce au théorème suivant :

Théorème (Théorème de la dimension)**.**
Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments.

Nous détaillerons la preuve un peu plus loin.

Définition
La ***dimension*** d'un espace vectoriel de dimension finie E, notée $\dim E$, est par définition le nombre d'éléments d'une base de E.

Méthodologie. Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, il suffit de trouver une base de E (une famille à la fois libre et génératrice) : le cardinal (nombre d'éléments) de cette famille donne la dimension de E. Le théorème 6 de la dimension prouve que même si on choisissait une base différente alors ces deux bases auraient le même nombre d'éléments.
Convention. On convient d'attribuer à l'espace vectoriel $\{0\}$ la dimension 0.

5.2. Exemples

Exemple

1. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\left(\binom{1}{0},\binom{0}{1}\right)$. La dimension de $\mathbb{R}^2$ est donc 2.
2. Les vecteurs $\left(\binom{2}{1},\binom{1}{1}\right)$ forment aussi une base de $\mathbb{R}^2$, et illustrent qu'une autre base contient le même nombre d'éléments.
3. Plus généralement, $\mathbb{K}^n$ est de dimension n, car par exemple sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ contient n éléments.
4. $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ car une base de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$, qui contient $n+1$ éléments.