Chapitre 1

Analyse vectorielle

2. Opérations sur les vecteurs

1. Géométrie vectorielle de l'espace

1.1 Vecteurs

Un vecteur du plan ou de l'espace est caractérisé par sa **direction**, son **sens** et sa **longueur** (ou **norme**).

Une **base** du plan est la donnée de deux vecteurs **non colinéaires**.
Une **base** de l'espace est la donnée de trois vecteurs **non coplanaires**.
Elle permet de repérer n'importe quel vecteur du plan ou de l'espace à l'aide de ses **composantes** (on dit aussi parfois **coordonnées**).

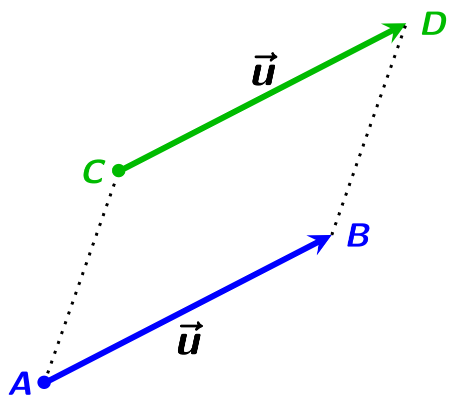
Composantes/bases dans l'espace : diverses notations

- $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ signifie : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
  $\hookrightarrow$ notation simple en dimension 2 ou 3.
- $\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ signifie : $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$
  $\hookrightarrow$ notation généralisable en dimension supérieure.
- $\vec{u}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ signifie : $\vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z$
  $\hookrightarrow$ notation utile pour les changements de systèmes de coordonnées (cartésiennes, polaires, cylindriques, sphériques...).

1.2 Vecteurs et points

Un vecteur du plan ou de l'espace est géométriquement représenté par un **bipoint** (A, B) surmonté d'une flèche indiquant le sens : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Il est ainsi représenté par un segment de droite orienté. Deux segments de droites orientés parallèles, de même longueur et de même sens représentent le même vecteur (règle du parallélogramme).



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC \text{ est un parallélogramme}$$

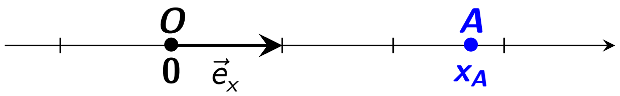
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

1.3 Coordonnées/repères

Un **repère** de l'espace est la donnée d'un point O et d'une **base** $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on l'écrit $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Il permet de repérer n'importe quel point de l'espace à l'aide de ses **coordonnées**.

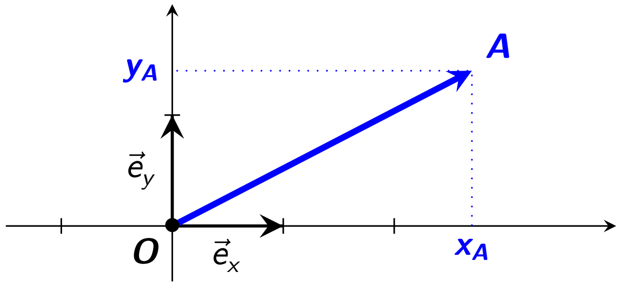
1.3.1 Repérage sur une droite

Dans un **repère** $(O; \vec{e}_x)$, un point quelconque A de la droite est repéré par son **abscisse** x_A : $\overrightarrow{OA} = x_A \vec{e}_x$.



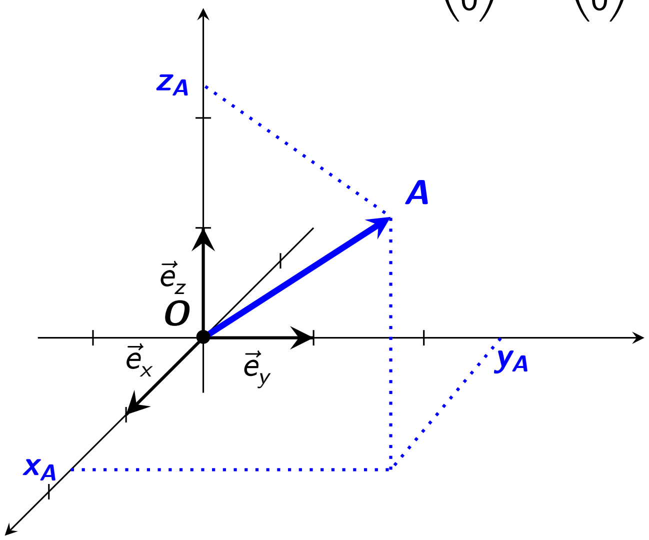
1.3.2 Repérage dans un plan

Dans un **repère** $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, un point quelconque A du plan est repéré par son **abscisse** x_A et son **ordonnée** y_A : $\overrightarrow{OA} = x_A \vec{e}_x + y_A \vec{e}_y$.



1.3.3 Repérage dans l'espace

Dans un **repère** $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, un point quelconque A de l'espace est repéré par son **abscisse** x_A, son **ordonnée** y_A et sa **cote** z_A : $\overrightarrow{OA} = x_A \vec{e}_x + y_A \vec{e}_y + z_A \vec{e}_z$.
On note usuellement les **coordonnées** d'un point en ligne, les **composantes** d'un vecteur en colonne : $O(0,0,0)$, $A(x_A, y_A, z_A)$ et $\vec{e}_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$.



Remarque : on parle parfois de coordonnées d'un vecteur, et on les écrit parfois en ligne : $\overrightarrow{OA}(x_A, y_A, z_A)$.

1.3.4 Vecteurs et points

Si (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) sont les **coordonnées** de A et B dans le **repère** $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on écrit $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. On a

$$\overrightarrow{OA} = x_A\vec{e}_x + y_A\vec{e}_y + z_A\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = x_B\vec{e}_x + y_B\vec{e}_y + z_B\vec{e}_z$$

Alors le vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ a pour **composantes** dans la **base** $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$. On écrit usuellement en colonne : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

Remarque : on note parfois les composantes en ligne : $AB(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

On écrit aussi parfois $\overrightarrow{AB} = B - A$ en cohérence avec la relation entre **coordonnées** de A et B et **composantes** de $\overrightarrow{AB}$ décrite ci-dessus.

2. Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

2.1. Opérations sur les vecteurs

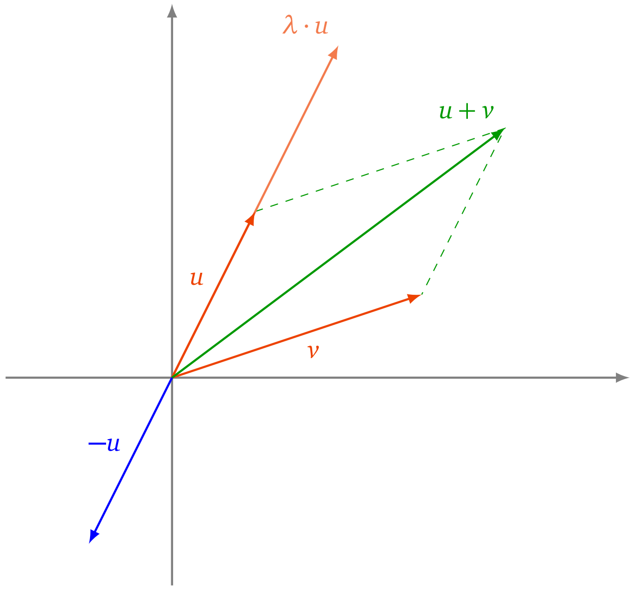
On généralise ces notions en considérant des espaces de dimension n pour tout entier positif $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Les éléments de l'espace de dimension n sont les n-uples $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de nombres réels. L'espace de dimension n est noté $\mathbb{R}^n$. Comme en dimensions 2 et 3, le n-uple $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dénote aussi bien un point qu'un vecteur de l'espace de dimension n.

Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.

- *Somme de deux vecteurs.* Leur somme est par définition le vecteur $u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$.
- *Produit d'un vecteur par un scalaire.* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ (appelé un *scalaire*) : $\lambda \cdot u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$.
- Le *vecteur nul* de $\mathbb{R}^n$ est le vecteur $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
- L'*opposé* du vecteur $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ est le vecteur $-u = \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$.

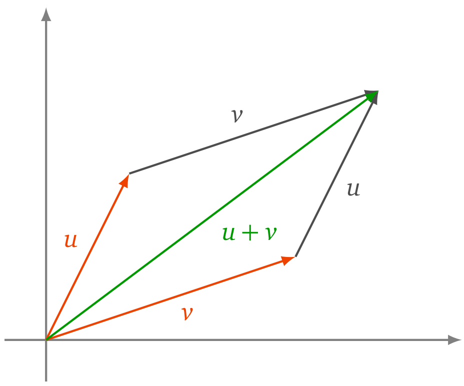
Voici des vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ (ici $\lambda = 2$) :



Dans un premier temps, vous pouvez noter $\vec{u}, \vec{v}, \vec{0}$ au lieu de u, v, 0. Mais il faudra s'habituer rapidement à la notation sans flèche. De même, si λ est un scalaire et u un vecteur, on notera souvent λu au lieu de $\lambda \cdot u$.

Théorème.
Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *et* $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Alors :*

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $u + 0 = 0 + u = u$
4. $u + (-u) = 0$
5. $1 \cdot u = u$
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
7. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
8. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$



Chacune de ces propriétés découle directement de la définition de la somme et de la multiplication par un scalaire. Ces huit propriétés font de $\mathbb{R}^n$ un ***espace vectoriel***. Dans le cadre général, ce sont ces huit propriétés qui définissent ce qu'est un espace vectoriel.

3. Produit scalaire

3.1 Définition (Produit scalaire/norme)

1. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Leur* ***produit scalaire*** *est* ***le réel***

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

où $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarque : *l'angle n'est pas nécessairement orienté.*

2. *La* ***norme*** *se déduit inversement du carré scalaire : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.*

Un vecteur est dit ***normé*** *ou* ***unitaire*** *lorsque sa norme vaut 1.*

3.2 Propriété (Bilinéarité)

1. *Le produit scalaire est* ***symétrique*** *: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.*
2. *Le produit scalaire est* ***bilinéaire*** *: $\begin{cases} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) \quad\quad = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$*

   (où λ est un réel).
3. *Le produit scalaire est* ***défini positif*** *: $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 > 0$ pour $\vec{u} \neq \vec{0}$.*

3.3 Propriété (Expression analytique)

Soit une base ***orthonormée*** *de l'espace et soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de composantes respectives $\vec{u}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ dans cette base.*

Le ***produit scalaire*** *et la* ***norme*** *s'expriment alors en réel selon :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

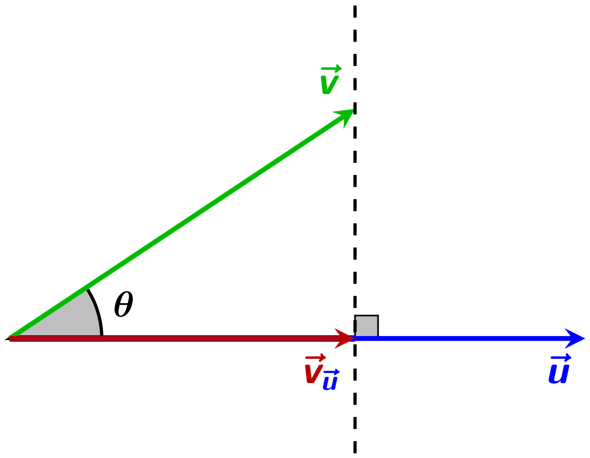
Remarque (Vecteur unitaire)

Pour tout vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$, le vecteur $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ est un vecteur **unitaire de mêmes sens et direction** que $\vec{u}$.

3.4 Propriété (Projection orthogonale d'un vecteur sur un autre)

Le ***projeté orthogonal*** *$\vec{v}_{\vec{u}}$ d'un vecteur $\vec{v}$ sur un vecteur* ***non nul*** *$\vec{u}$ s'exprime selon*

$$\boxed{\vec{v}_{\vec{u}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u}}$$



*Si l'on note $\overline{v}_{\vec{u}}$ la **mesure algébrique** de $\vec{v}_{\vec{u}}$ sur l'axe **orienté** par $\vec{u}$, alors on a : $\overline{v}_{\vec{u}} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|}$. En conséquence, $\overline{v}_{\vec{u}}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ont **même signe**.*

***Cas particulier :** lorsque $\vec{u}$ est un vecteur **unitaire**, la formule se simplifie selon*

$$\boxed{\vec{v}_{\vec{u}} = (\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{u}}$$

Démonstration de la projection

Par trigonométrie dans un triangle rectangle, $\overline{v}_{\vec{u}} = \|\vec{v}\|\times\cos\theta$ où $\theta = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Par ailleurs, on a $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$, donc $\overline{v}_{\vec{u}} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|}$.

On obtient alors le vecteur $\vec{v}_{\vec{u}}$ le long de la droite dirigée par le vecteur **unitaire** $\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ selon $\vec{v}_{\vec{u}} = \overline{v}_{\vec{u}}\left(\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}\right) = \dfrac{\overline{v}_{\vec{u}}}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ d'où $\vec{v}_{\vec{u}} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$.

Exemple (Projections sur une base orthonormée)

Soit $\vec{u}$ un vecteur de composantes $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ dans la base **orthonormée** $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de l'espace, c'est-à-dire $\vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z$.

On peut obtenir ses composantes grâce aux produits scalaires (**projections** sur les vecteurs de la base) selon

$$\begin{cases} u_x = \vec{u}\cdot\vec{e}_x \\ u_y = \vec{u}\cdot\vec{e}_y \\ u_z = \vec{u}\cdot\vec{e}_z \end{cases}$$

3.5 Applications géométriques

- Tester l'**orthogonalité** de deux vecteurs :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont } \textbf{orthogonaux} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

- Tester la **colinéarité** de deux vecteurs :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont } \textbf{colinéaires} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \pm\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$$

  Les vecteurs sont alors **de même sens** ssi le produit scalaire est **positif**.

Exemple (Plan orthogonal à un vecteur)

On se place dans une base **orthonormée** de l'espace.

Soit a, b, c trois réels non simultanément nuls et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur fixé.

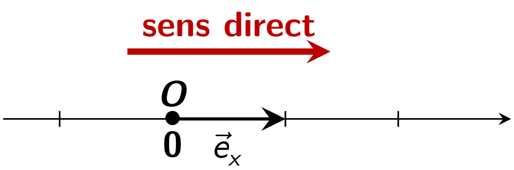
Alors l'ensemble des vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ orthogonaux à $\vec{u}$ sont caractérisés par la relation $ax + by + cz = 0$. Il s'agit d'une **équation cartésienne** du **plan vectoriel orthogonal à $\vec{v}$.**

4. Orientation

4.1 Orientation d'une droite

Pour **orienter** une droite, on choisit une origine O et un sens de parcours sur la droite (2 **orientations** possibles).

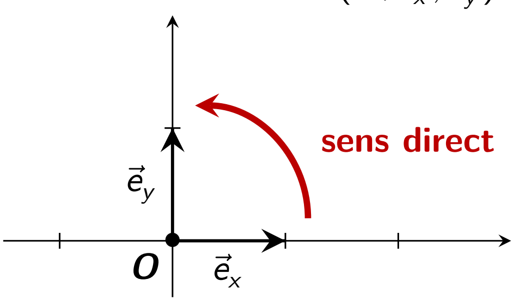
Le vecteur **unitaire** choisi $\vec{e}_x$ donne l'orientation choisie. On définit ainsi un **repère normé orienté** $(O; \vec{e}_x)$.



4.2 Orientation d'un plan

On choisit un axe de repère normé $(O; \vec{e}_x)$ puis un deuxième axe passant par O de repère normé $(O; \vec{e}_y)$, perpendiculaire au premier. On choisit un sens de rotation pour passer des vecteurs **unitaires** $\vec{e}_x$ à $\vec{e}_y$, c'est le **sens direct** ou **trigonométrique**.

On obtient ainsi un **repère orthonormé direct** $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

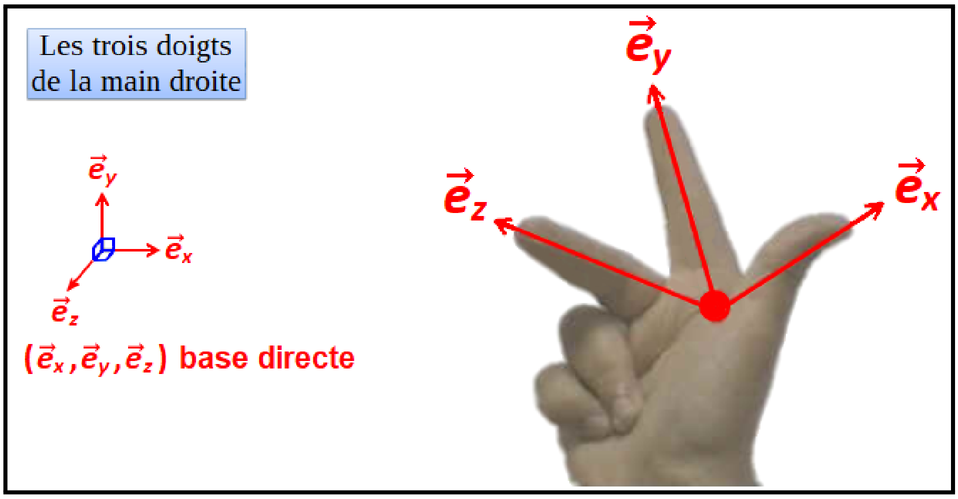


4.3 Orientation de l'espace

Une fois un plan de l'espace muni d'un repère **orthonormé** $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, il y a deux choix possibles (opposés) du dernier vecteur **unitaire** $\vec{e}_z$ **orthogonal** aux deux premiers, pour **orienter** l'espace.

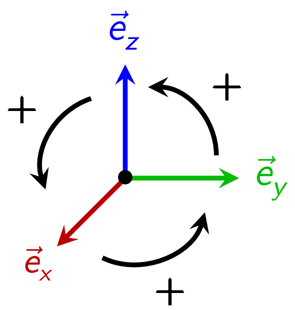
En physique, le **sens direct** du repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ correspond à la **règle des trois doigts de la main droite :**

pouce : $\vec{e}_x$ ***index : $\vec{e}_y$*** ***majeur : $\vec{e}_z$***

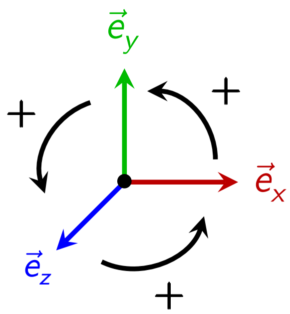


On obtient un repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, dans lequel les trois vecteurs $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ sont **unitaires** et **orthogonaux** deux à deux, **orienté** selon la règle précédente.
On dit que c'est un **repère orthonormé direct**.

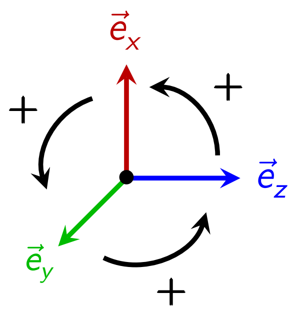
4.4 Orientation et permutations



$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ **directe**

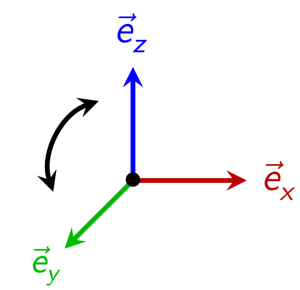


$(\vec{e}_z, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ **directe**

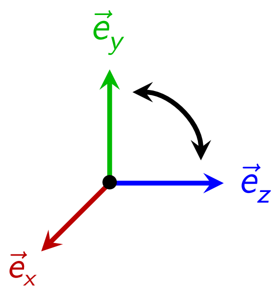


$(\vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_x)$ **directe**

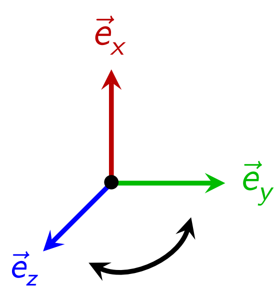
Une permutation **circulaire conserve** l'orientation



$(\vec{e}_y, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ **indirecte**



$(\vec{e}_x, \vec{e}_z, \vec{e}_y)$ **indirecte**



$(\vec{e}_z, \vec{e}_y, \vec{e}_x)$ **indirecte**

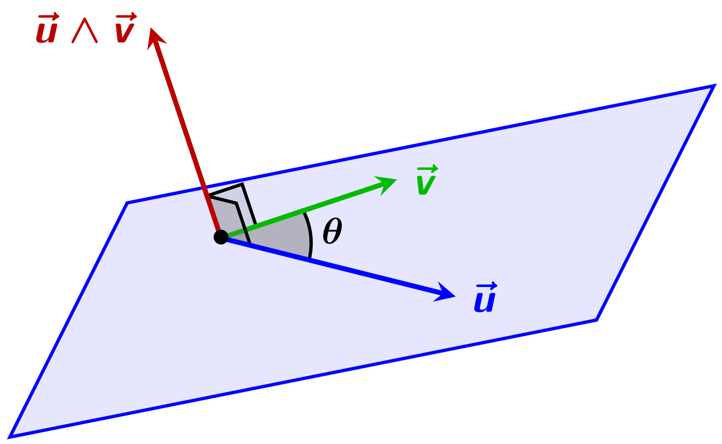
Une permutation **de deux vecteurs inverse** l'orientation

5. Produit vectoriel

5.1 Définition (Produit vectoriel)

*Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace **orienté**. Leur produit vectoriel est le **vecteur** $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :*

- *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou que l'un des deux est nul, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;*
- *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont ni nuls ni colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur dont les caractéristiques sont :*
  - ***direction :** $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est **orthogonal** à $\vec{u}$ et $\vec{v}$;*
  - ***sens :** la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est **directe** ;*
  - ***longueur :** $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|$.*



Attention : le produit vectoriel de deux vecteurs n'existe qu'en dimension **3** !

5.2 Propriété (Bilinéarité)

1. *Le produit vectoriel est **antisymétrique** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.*
2. *Le produit vectoriel est **bilinéaire**, c'est-à-dire **linéaire** par rapport à chaque variable :*

$$\begin{cases} (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} & = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} & = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) & = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \\ \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) & = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) \end{cases}$$

3. *Dans une **base orthonormée directe** de l'espace $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de composantes respectives $\vec{u}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$.*
   Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour composantes :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ -(u_x v_z - u_z v_x) \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

En particulier, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ donc de composantes respectives $\vec{u}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_x v_y - u_y v_x)\vec{e}_z$.

5.3 Composantes : procédé mnémotechnique

Retenir les expressions des composantes d'un produit vectoriel étant difficile, il est pratique de procéder comme suit :

1. on écrit les composantes des vecteurs sous forme de matrices-colonnes ;
2. on recopie les deux premières composantes de chaque colonne en dessous ;
3. on note l'emplacement des « produits en croix » et l'on effectue les différences des produits en croix :

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} & \wedge & \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\
u_x & & v_x \\
u_y & & v_y
\end{array}
\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array}
\begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}
$$

On peut aussi calculer les composantes d'un produit vectoriel à l'aide d'un déterminant. En posant $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (**déterminant d'ordre 2**) et en « développant » par rapport à la 3e colonne :

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_x & v_x & \vec{e}_x \\ u_y & v_y & \vec{e}_y \\ u_z & v_z & \vec{e}_z \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \vec{e}_x - \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \vec{e}_z \\
&= (u_y v_z - u_z v_y)\vec{e}_x - (u_x v_z - u_z v_x)\vec{e}_y + (u_x v_y - u_y v_x)\vec{e}_z
\end{aligned}
$$

Remarque

Dans toute **base orthonormée directe** de l'espace $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on a

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y &= -\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_z \\
\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z &= -\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_x \\
\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x &= -\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_y
\end{aligned}
$$

Démonstration de l'expression analytique

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z) \wedge (v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z) \\
&= (u_x\vec{e}_x) \wedge (v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z) + u_y\vec{e}_y \wedge (v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z) \\
&\quad + u_z\vec{e}_z \wedge (v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z) \text{ par linéarité par rapport à la 1}^{\text{re}} \text{ variable} \\
&= (u_x\vec{e}_x) \wedge (v_x\vec{e}_x) + (u_x\vec{e}_x) \wedge (v_y\vec{e}_y) + (u_x\vec{e}_x) \wedge (v_z\vec{e}_z) \\
&\quad + (u_y\vec{e}_y) \wedge (v_x\vec{e}_x) + (u_y\vec{e}_y) \wedge (v_y\vec{e}_y) + (u_y\vec{e}_y) \wedge (v_z\vec{e}_z) \\
&\quad + (u_z\vec{e}_z) \wedge (v_x\vec{e}_x) + (u_z\vec{e}_z) \wedge (v_y\vec{e}_y) + (u_z\vec{e}_z) \wedge (v_z\vec{e}_z)
\end{aligned}
$$

On simplifie tout ceci en utilisant $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x = \vec{0}$, $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z$, $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -\vec{e}_z$, etc.

On obtient $\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y)\vec{e}_x + (u_z v_x - u_x v_z)\vec{e}_y + (u_x v_y - u_y v_x)\vec{e}_z$.

5.4 Applications géométriques

- Tester la **colinéarité** de deux vecteurs :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont } \textbf{colinéaires} \iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

- Tester l'**orthogonalité** de deux vecteurs :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont } \textbf{orthogonaux} \iff \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$$

- Tester la **coplanarité** de trois vecteurs :

$$\begin{aligned} \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont } \textbf{coplanaires} &\iff \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0 \\ &\iff \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u}) = 0 \\ &\iff \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 \end{aligned}$$

  Remarque : la quantité $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ s'appelle **produit mixte** des trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, ce produit est noté $\big((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\big)$ (cf. paragraphe 6.1).
  Il se trouve que les trois nombres $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$, $\vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u})$, $\vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$ coïncident...

- Calcul d'un vecteur **orthogonal** à deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires : $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
- Calcul d'un vecteur **normal** à un plan défini par trois points A, B, C : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.