Correction de l'exercice 1

1. Pour montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base nous allons montrer que cette famille est libre et génératrice.

   (a) Montrons que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre. Soit une combinaison linéaire nulle $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, nous devons montrer qu'alors les coefficients a, b, c sont nuls. Ici le vecteur nul est $0 = (0,0,0)$

$$\begin{aligned}
& av_1 + bv_2 + cv_3 = (0,0,0) \\
\iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (0,0,0) \\
\iff & (b+c, a+c, a+b) = (0,0,0) \\
\iff & \begin{cases} b+c=0 \\ a+c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

   Ainsi les coefficients vérifient $a = b = c = 0$, cela prouve que la famille est libre.

   (b) Montrons que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice. Pour n'importe quel vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ on doit trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$.

$$\begin{aligned}
& av_1 + bv_2 + cv_3 = v \\
\iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (x,y,z) \\
\iff & (b+c, a+c, a+b) = (x,y,z) \\
\iff & \begin{cases} b+c=x \\ a+c=y & (L_2) \\ a+b=z & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} b+c=x & (L_1') \\ a+c=y \\ b-c=z-y & (L_3') = (L_3 - L_2) \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 2b = x+z-y & (L_1' + L_3') \\ a+c=y \\ 2c = x-(z-y) & (L_1' - L_3') \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2}(-x+y+z) \\ b = \frac{1}{2}(x-y+z) \\ c = \frac{1}{2}(x+y-z) \end{cases}
\end{aligned}$$

   Pour $a = \frac{1}{2}(-x+y+z)$, $b = \frac{1}{2}(x-y+z)$, $c = \frac{1}{2}(x+y-z)$ nous avons donc la relation $av_1 + bv_2 + cv_3 = (x,y,z) = v$. Donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice.

   (c) La famille est libre et génératrice donc c'est une base.

   (d) Pour écrire $w = (1,1,1)$ dans la base (v_1, v_2, v_3) on peut résoudre le système correspondant à la relation $av_1 + bv_2 + cv_3 = w$. Mais en fait nous l'avons déjà résolu pour tout vecteur (x,y,z), en particulier pour le vecteur $(1,1,1)$ la solution est $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$. Autrement dit $\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 = w$. Les coordonnées de w dans la base (v_1, v_2, v_3) sont donc $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2. Pour montrer que la famille est libre et génératrice les calculs sont similaires à ceux de la question précédente. Notons $\mathscr{B}$ la base (v_1, v_2, v_3).

   Exprimons ensuite e_1 dans cette base, les calculs donnent : $e_1 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3$. Ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

   $e_2 = \frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3$. Ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

   $e_3 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 - \frac{2}{3}v_3$. Ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

   Les calculs sont ensuite terminés, on remarque que $w = (1,2,-3)$ vaut en fait $w = e_1 + 2e_2 - 3e_3$ donc par nos calculs précédents $w = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3 + 2(\frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3) - 3(\frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 - \frac{2}{3}v_3) = 2v_2 + 3v_3$. Les coordonnées de w dans $\mathscr{B}$ sont $(0,2,3)$.

Correction de l'exercice 2

3. Par exemple la famille $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ mais pas génératrice.
4. La famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$ mais pas libre.

Correction de l'exercice 3

Quand le nombre de vecteurs égal la dimension de l'espace nous avons les équivalences, entre *être une famille libre* et *être une famille génératrice* et donc aussi *être une base*.
Trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ forment donc une base si et seulement s'ils forment une famille libre. Vérifions quand c'est le cas.

$$\begin{aligned}
& a(1,0,t)+b(1,1,t)+c(t,0,1)=(0,0,0)\\
\iff & (a+b+tc,b,at+bt+c)=(0,0,0)\\
\iff & \begin{cases} a+b+tc=0\\ b=0\\ at+bt+c=0\end{cases} \iff \begin{cases} b=0\\ a+tc=0\\ at+c=0\end{cases}\\
\iff & \begin{cases} b=0\\ a=-tc\\ (-tc)t+c=0\end{cases} \iff \begin{cases} b=0\\ a=-tc\\ (t^2-1)c=0\end{cases}
\end{aligned}$$

Premier cas : si $t\neq\pm1$. Alors $t^2-1\neq0$ et donc la seule solution du système est $(a=0,b=0,c=0)$. Dans ce cas la famille est libre et est donc aussi une base.
Deuxième cas : si $t=\pm1$. Alors la dernière ligne du système disparaît et il existe des solutions non triviales (par exemple si $t=1$, $(a=1,b=0,c=-1)$ est une solution). La famille n'est pas libre et n'est donc pas une base.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. C'est bien une base. Comme nous avons trois vecteurs et nous souhaitons montrer qu'ils forment un base d'un espace vectoriel de dimension 3, il suffit de montrer que soit la famille est libre, soit elle est génératrice (ces conditions sont équivalentes pour n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n).

   Il est plus simple de montrer que la famille est libre. Soit une combinaison linéaire nulle $av_1+bv_2+cv_3 = 0$ il faut montrer que $a=b=c=0$. Mais attention ici le corps de base est $K=\mathbb{C}$ donc a,b,c sont des nombres complexes.

$$\begin{aligned}
& av_1+bv_2+cv_3=0 \\
\iff & a(1,-1,i)+b(-1,i,1)+c(i,1,-1)=(0,0,0) \\
\iff & (a-b+ic,-a+ib+c,ia+b-c)=(0,0,0) \\
\iff & \begin{cases} a-b+ic=0 \\ -a+ib+c=0 \\ ia+b-c=0 \end{cases} \\
\iff & \cdots \text{ on résout le système} \\
\iff & a=0, b=0, c=0
\end{aligned}$$

   La famille (v_1,v_2,v_3) est libre, donc aussi génératrice ; c'est donc une base de $\mathbb{C}^3$.

2. On cherche $a,b,c\in\mathbb{C}$ tels que $av_1+bv_2+cv_3=v$. Il s'agit donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} a-b+ic=1+i \\ -a+ib+c=1-i \\ ia+b-c=i \end{cases}$$

   On trouve $a=0$, $b=\frac{1}{2}(1-i)$, $c=\frac{1}{2}(1-3i)$. Nous avons donc $v=\frac{1}{2}(1-i)v_2+\frac{1}{2}(1-3i)v_3$ et ainsi les coordonnées de v dans la base (v_1,v_2,v_3) sont $(0,\frac{1}{2}(1-i),\frac{1}{2}(1-3i))$.

Correction de l'exercice 5

1. G est engendré par deux vecteurs donc $\dim G\leqslant 2$. Clairement v_4 et v_5 ne sont pas liés donc $\dim G\geqslant 2$ c'est-à-dire $\dim G=2$.

2. F est engendré par trois vecteurs donc $\dim F\leqslant 3$. Un calcul montre que la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$ est libre, d'où $\dim F\geqslant 3$ et donc $\dim F=3$.