

TD N° 01:

Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de \mathbb{R}^3 . Trouver les composantes du vecteur $w = (1, 1, 1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3) .
2. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 0, -1)$ forment une base de \mathbb{R}^3 . Trouver les composantes du vecteur $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ et $w = (1, 2, -3)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3) .

Exercice 2

3. Dans \mathbb{R}^3 , donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.
4. Dans \mathbb{R}^3 , donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Exercice 3

Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs

$$\{(1, 0, t), (1, 1, t), (t, 0, 1)\}$$

forment une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 4

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1, -1, i)$, $v_2 = (-1, i, 1)$, $v_3 = (i, 1, -1)$ forment une base de \mathbb{C}^3 .
2. Calculer les coordonnées de $v = (1 + i, 1 - i, i)$ dans cette base.

Exercice 5

On considère, dans \mathbb{R}^4 , les vecteurs :

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), \quad v_2 = (1, 1, 1, 3), \quad v_3 = (2, 1, 1, 1), \quad v_4 = (-1, 0, -1, 2), \quad v_5 = (2, 3, 0, 1).$$

Soit F l'espace vectoriel engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$ et soit G celui engendré par $\{v_4, v_5\}$. Calculer les dimensions respectives de F , G