Chapitre 1

Analyse vectorielle

3.Systèmes de coordonnées

1. Coordonnées cartésiennes
2. Coordonnées polaires
3. Coordonnées cylindriques
4. Coordonnées sphériques

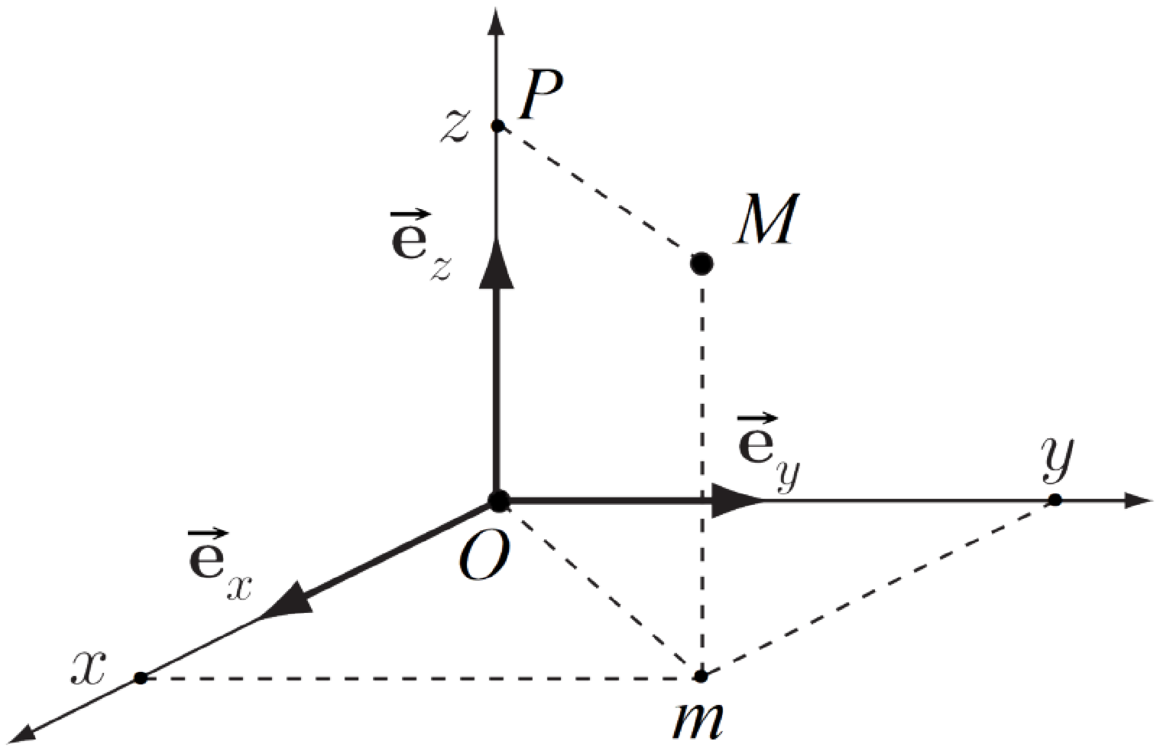
1) Coordonnées cartésiennes

Dans tout ce paragraphe, on se place dans le plan ou l'espace muni d'un repère orthonormé **fixe** direct $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ ou $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Coordonnées cartésiennes

Dans l'espace (ou le plan), tout point M peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}$$



Les points $m(x, y, 0)$ et $P(0, 0, z)$ sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur le plan (Oxy) et l'axe (Oz).

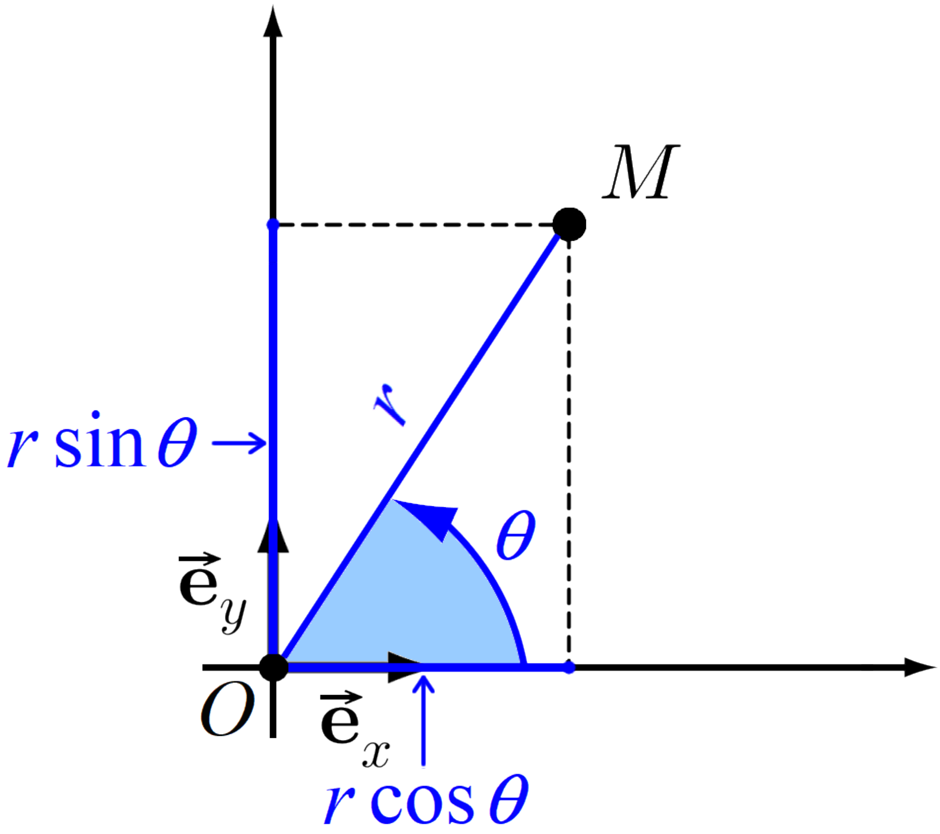
2) Coordonnées polaires

Définition (Coordonnées polaires)

Un point M du plan peut être repéré par sa distance $r \geqslant 0$ par rapport à l'origine O et son angle (lorsque $M \neq O$) $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OM})$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

*Le couple (r, θ) est constitué des **coordonnées polaires** du point M.*

Avec ces notations, on a la relation $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\vec{e}_x + r\sin(\theta)\vec{e}_y}$.



*L'origine O et l'axe $(O; \vec{e}_x)$ sont respectivement appelés **pôle** et **axe polaire**.*
*Le point O n'a pas de **coordonnées polaires** uniques.*

Propriété (Passage coordonnées cartésiennes/polaires)

*Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **polaires** et inversement :*

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos(\theta) = \dfrac{x}{r},\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{r} \end{cases}}$$

Propriété (Courbes coordonnées)

*Les **courbes coordonnées** en **coordonnées polaires** sont obtenues en fixant **une** des coordonnées :*

- *l'équation $\boldsymbol{r = }$ **cte** donne un **cercle** de centre O ;*
- *l'équation $\boldsymbol{\theta =}$ **cte** donne une **demi-droite** d'origine O.*

Plus précisément, pour $r_0 > 0$ et $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ fixes :

- *l'ensemble des points $M(r_0, \theta)$ est le **cercle** de centre O et de rayon r_0 ;*
- *l'ensemble des points $M(r, \theta_0)$ est la **demi-droite** d'origine O d'angle polaire θ_0.*

3) Coordonnées cylindriques

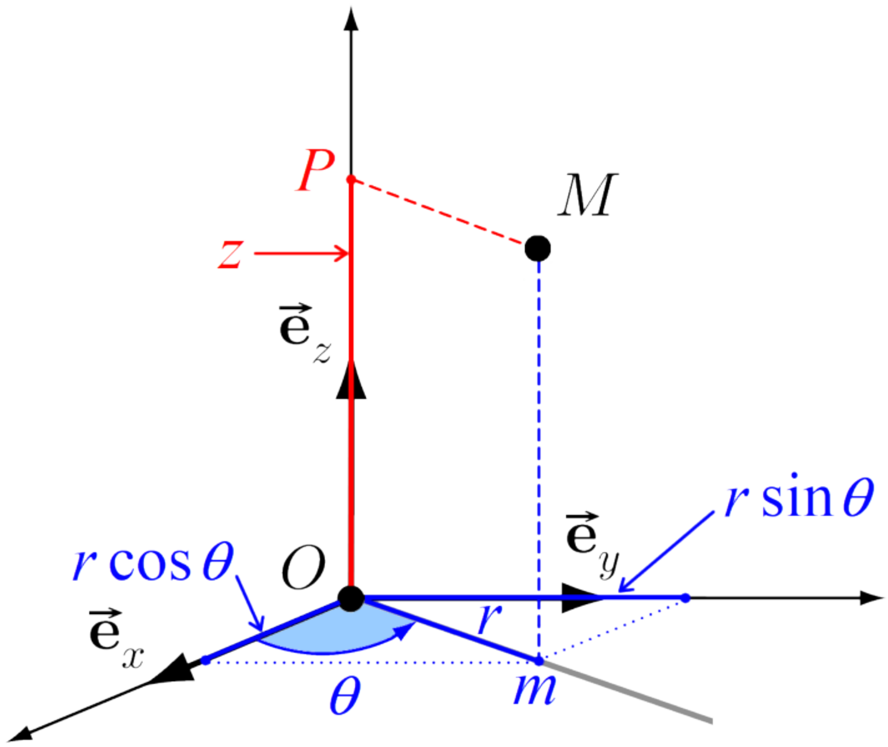
Les **coordonnées cylindriques** dans l'espace sont les « **polaires + l'altitude** ».

Définition (Coordonnées cylindriques)

*On projette le point M de l'espace sur le plan (Oxy) en m et sur l'axe (Oz) en P : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{Om}+\overrightarrow{OP}$, et l'on repère le projeté m par ses **coordonnées polaires** dans le plan :*

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\cos(\theta)\vec{e}_x + r\sin(\theta)\vec{e}_y + z\vec{e}_z \text{ avec } r \in [0,+\infty[,\ \theta \in [0,2\pi[,\ z \in \mathbb{R}}$$

*Le triplet (r,θ,z) est constitué des **coordonnées cylindriques** du point M.*



Remarque

- Les points de (Oz) n'ont pas de **coordonnées cylindriques** uniques.
- Si m et P sont les projetés de M sur le plan (Oxy) et la droite (Oz), alors en **coordonnées cylindriques :** $M(r,\theta,z)$, $m(r,\theta,0)$ et $P(0,??,z)$.

Propriété (Passage coordonnées cartésiennes/cylindriques)

*Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **cylindriques** et inversement :*

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}} \quad \textit{et} \quad \boxed{\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos(\theta) = \dfrac{x}{r},\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{r} \\ z = z \end{cases}}$$

4) Coordonnées sphériques

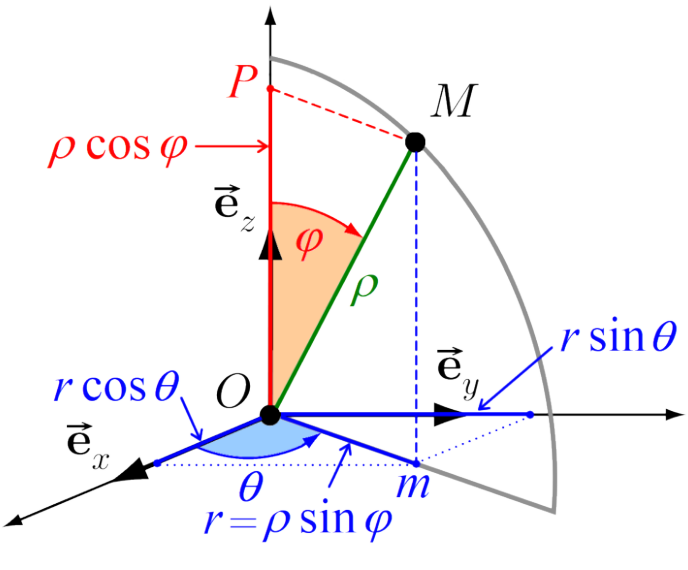
Définition (Coordonnées sphériques)

On repère un point M de l'espace par :

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OM}\| & \textit{distance à l'origine} \\ \varphi = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM}) & \textit{colatitude (par rapport au demi-axe } (Oz)) \\ \theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{Om}) & \textit{longitude (par rapport au demi-axe } (Ox)) \end{cases}$$

*Le triplet (ρ, φ, θ) constitue les **coordonnées sphériques** du point M.*
En décomposant comme précédemment $\overrightarrow{OM}$ selon $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OP}$:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\,\vec{e}_y + \rho\cos(\varphi)\,\vec{e}_z \ \textit{avec}\ \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi[}$$



Remarque

- Les points de (Oz) n'ont pas de **coordonnées sphériques** uniques.
- Il existe plusieurs conventions pour les notations de **coordonnées sphériques** et **cylindriques.** Le choix adopté ici est tel que θ joue le même rôle dans les systèmes de **coordonnées cylindriques** et **coordonnées sphériques.**

Mais ce n'est pas toujours le cas !
Bien faire attention aux conventions choisies...

Propriété (Passage coordonnées cartésiennes/sphériques)

*Pour passer des **coordonnées cartésiennes** aux **sphériques** et inversement :*

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases}} \quad \textit{et} \quad \boxed{\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos(\varphi) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \sin(\varphi) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}}$$