Chapitre
2

Dérivabilité

1. Dérivée

1. Dérivabilité en un point

1.1. Nombre dérivé

1.2. Dérivabilité à gauche, à droite

1.3. Interprétation graphique

1. Dérivabilité en un point

1.1. Nombre dérivé

Dans ce qui suit, sauf indication contraire, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, f une application de I dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I.

Définition (Dérivabilité)

- *Pour tout $x \in I \backslash \{x_0\}$, on appelle **taux d'accroissement de f entre x_0 et x** le rapport $\tau_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.*
- *On dit que f est **dérivable en x_0** si l'application τ_{x_0} admet une limite **finie** en x_0.*
  *On note alors cette limite $\mathbf{f'(x_0)}$ et on l'appelle le **nombre dérivé de f en x_0 :***

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Si x_0 est une borne de l'intervalle I, la limite de τ_{x_0} en x_0 est supposée être une limite à gauche ou une limite à droite selon le cas de figure.

Corollaire (Dérivabilité $\Longrightarrow$ continuité)

*Si une fonction f est **dérivable** en x_0 alors f est **continue** en x_0.*

*Attention, la **réciproque** de cette implication est **fausse**. Par exemple, pour $f(x) = |x|$ et $x_0 = 0$, la fonction f est **continue** mais **pas dérivable** en x_0.*

1.2. Dérivabilité à gauche, à droite

Définition (Dérivabilité à gauche, à droite)

*On dit que f est **dérivable à gauche en x_0** (resp. **dérivable à droite en x_0**) lorsque τ_{x_0} admet une limite **finie** à gauche en x_0 (resp. une limite **finie** à droite en x_0).*

On note alors $f'_g(x_0) = \displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et $f'_d(x_0) = \displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Proposition

*Si f est définie **dans un voisinage de x_0** :*

*f est **dérivable** en x_0 ssi f est **dérivable à gauche et à droite** en x_0 **et** $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*
On a alors $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemple (Valeur absolue)

Soit f la fonction « valeur absolue » : $f(x) = |x|$.

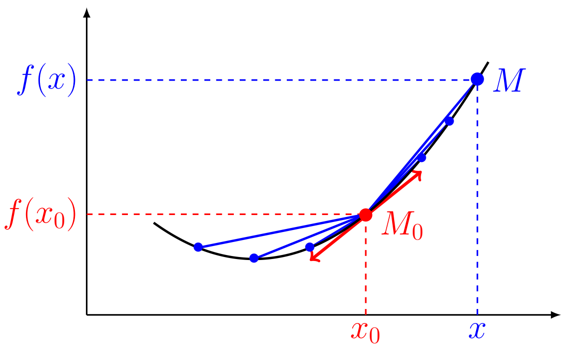
On a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} +1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ puis $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +1$, $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1$.

Ainsi f est dérivable **à droite et à gauche** en 0 : $f'_d(0) = +1$ et $f'_g(0) = -1$, mais $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f **n'est pas** dérivable en 0.

1.3. Interprétation graphique

Définition (Tangente)

On munit le plan d'un repère orthonormal.



1. *Si f est une fonction **dérivable** en x_0, la droite d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est appelée **tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0.*

   *C'est la position limite des **cordes** reliant un point de la courbe $M(x, f(x))$ au point $M_0(x_0, f(x_0))$ lorsque M tend vers M_0.*

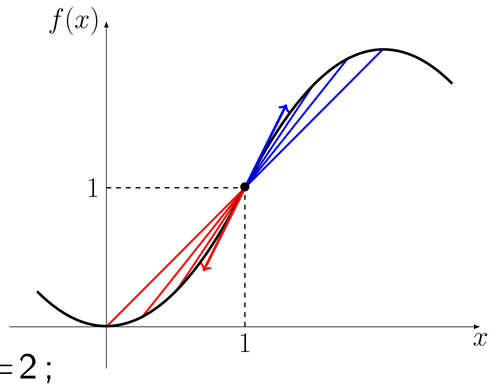
   *Dans le cas d'une **dérivabilité** de f uniquement **à gauche ou à droite** en x_0, on parle de **demi-tangente**.*

2. *Dans le cas où $\displaystyle\lim_{x \to x_0^- \text{ ou } x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, on dit que la courbe représentative de f admet une **demi-tangente verticale** en x_0.*

3. *Si f est **continue** en x_0 et **dérivable à gauche et à droite** en x_0 avec $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ on dit que la courbe représentative de f admet un **point anguleux** en x_0.*

Exemple (Raccord dérivable)

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 1, \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$



- f est continue sur $\mathbb{R}$;
- on a $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1, \\ -x + 3 & \text{si } x > 1, \end{cases}$

  puis $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$;
- donc f est dérivable à droite et à gauche en 1 et $f'_g(1) = f'_d(1) = 2$. Ainsi f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$;
- la courbe admet la droite d'équation $y = 2x - 1$ pour **tangente** au point de coordonnées $(1, 1)$.