



Chapitre 03 : FORMALISME DE HAMILTON

1. Formalisme hamiltonien

- Lagrange avait réussi à décrire les équations pour le mouvement de la lune et des planètes sous forme d'une équation du premier ordre connue sous le nom d'équations planétaires, qui sont en principe plus facile à résoudre par rapport aux équations de Lagrange qui sont-elles du deuxième ordre.
- Lagrange voulait donc élargir cette idée et réécrire en générale les équations de Lagrange que nous avons vu dans le formalisme lagrangien sous forme d'équation du premier ordre.

- Pour transformé une équation du **deuxième** ordre en deux équations d'ordre **un**, il suffit d'introduire le dérivé premier comme nouvelle inconnue.
- Nous avons vu que le formalisme lagrangien est basé sur une description du système par les variables q et $\dot{q}$, ou autrement dit, par les coordonnées et les vitesses généralisés.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 ; \quad \forall k = 1, \dots, \ell \quad (1)$$

Les « ℓ » équations de Lagrange sont des équations du deuxième ordre en « t » qui ne sont pas forcément facile à résoudre, il est donc plus convenable de transformer ce système de « ℓ » équations du deuxième ordre en « t » en un système de deux « ℓ » équation du premier ordre en « t ».

Pour faire cela, Lagrange a introduit des nouvelles quantités qu'il appelle impulsion p_k définie comme :

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (2)$$

avec cette nouvelle définition les équations de Lagrange s'écrivent plus simplement ainsi :

$$\frac{d}{dt}(p_k) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Leftrightarrow \frac{dp_k}{dt} = \dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (3)$$

Dans ce nouveau formalisme la description du système se fait par les variables q et p , donc par les coordonnées généralisées et par les impulsions.

Comme nous l'avons vues, le lagrangien est une fonction des variables q et $\dot{q}$

$$L(q_1, \dots q_\ell, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_\ell)$$

La différentielle de lagrangien s'écrit donc ainsi :

$$dL = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \quad (4)$$

Où on rappelle que la somme se fait sur les « ℓ » degrés de libertés du système, dans cette différentielle nous voyons apparaître ces deux dérivés

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \dot{p}_k \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$$

En prenant en compte ces égalités, nous pouvons réécrire ainsi la différentielle de lagrangien

$$dL = \sum_{k=1}^{\ell} \dot{p}_k dq_k + \sum_{k=1}^{\ell} p_k d\dot{q}_k \quad (5)$$

Dans cette expression nous pouvons écrire le deuxième terme à droite d'une façon plus commode.

Ecrivons la différentielle de la somme des p_k fois $\dot{q}_k$

$$d\left(\sum_{k=1}^{\ell} p_k \dot{q}_k\right) = \sum_{k=1}^{\ell} p_k d\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k dp_k$$

$$\sum_{k=1}^{\ell} p_k d\dot{q}_k = d\left(\sum_{k=1}^{\ell} p_k \dot{q}_k\right) - \sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k dp_k \quad (6)$$

Réinjectons l'équation (6) dans l'équation (5), nous obtiendrons :

$$dL = \sum_{k=1}^{\ell} \dot{p}_k dq_k + d \left(\sum_{k=1}^{\ell} p_k \dot{q}_k \right) - \sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k dp_k \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k dp_k - \sum_{k=1}^{\ell} \dot{p}_k dq_k = d \left(\sum_{k=1}^{\ell} p_k \dot{q}_k \right) - dL \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k dp_k - \sum_{k=1}^{\ell} \dot{p}_k dq_k = d \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{\ell} p_k \dot{q}_k}_H - L \right) \quad (9)$$

$$\sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k dp_k - \sum_{k=1}^{\ell} \dot{p}_k dq_k = dH \quad (10)$$

$$dH = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\ell} \dot{q}_k dp_k - \sum_{k=1}^{\ell} \dot{p}_k dq_k \\ \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k \end{cases} \quad (11)$$

Donc

$$\forall k = 1, \dots, \ell \quad \begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases} \quad \text{EQUATION DE HAMILTON} \quad (12)$$

2. Transformation de Legendre

- La transformation de Legendre est un autre moyen qui permet de passer **du formalisme Lagrangien** $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ au **formalisme Hamiltonien** $H(q_i, p_i, t)$.
- C'est une **transformation mathématique** qui **change de variables** :

on remplace les **vitesse**s généralisées $\dot{q}_i$ par les **moments** p_i conjugué.

➤ Mathématiquement, la **transformation de Legendre** est une opération qui permet de **changer de variable indépendante** dans une fonction.

➤ Au lieu de travailler avec une variable **x** , on introduit une **nouvelle variable conjuguée p** définie par : **$p = \frac{df}{dx}$**

➤ La **transformation de Legendre** de **$f(x)$** est alors :

$$g(p) = px - f(x)$$

où **g** est appelée **transformée de Legendre** de **f** .

x doit être exprimé en fonction de **p** (via la relation **$p = f'(x)$**).

Example 1

Soit :

$$f(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

Calculer la transformation de Legendre de $f(x)$.

2.1. Application du Transformation de Legendre en mécanique analytique:

Dans le **formalisme lagrangien**, on a la fonction : $L(q, \dot{q}, t)$

On définit le **moment généralisé** conjugué à q par: $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

La **transformation de Legendre** permet de passer du

Lagrangien $L(q, \dot{q}, t)$ à l'**Hamiltonien** $H(q, p, t)$:

$$H(q, p, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)$$

où $\dot{q}$ doit être exprimé en fonction de p .

Cette expression change de variable indépendante : on passe de $\dot{q}_i$ à p_i .

Mathématiquement :

$$g(p) = px - f(x)$$

Avec : $p = \frac{df}{dx}$

Physiquement : (Mécanique Analytique)

$$f \rightarrow L$$

$$x \rightarrow \dot{q}$$

$$g \rightarrow H$$

Puisque : $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

Alors:

$$g(p) = px - f(x) \rightarrow$$

$$H(p) = p\dot{q} - L(\dot{q})$$

Example 2

Soit L Lagrangien d'une particule de masse m se déplaçant sur un axe :

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

1. Calculer le moment conjugué p .
2. Trouver l'Hamiltonien $H(x, p)$.

Example 3

Lagrangien d'un oscillateur harmonique est donné par :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

1. Calculer le moment conjugué p .
2. Trouver l'Hamiltonien $H(x, p)$.

Example 4

Lagrangien L d'une particule de masse m se déplace sous l'effet d'un champ de gravité g est donner par :

$$L = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy$$

1. Calculer le moment conjugué p_y .
2. Trouver l'Hamiltonien $H(y, p_y)$.
3. Vérifier que $H = T + V$.

2.3. Condition d'inversibilité

En mécanique analytique, on part du **Lagrangien**

$$L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

et on définit les **moments conjugués** :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Le but est de pouvoir écrire les vitesses $\dot{q}_i$ en fonction des impulsions p_i .

Mais cela n'est possible que si la relation entre $\dot{q}_i$ et p_i est **inversible**.

Mathématiquement, qu'est-ce que ça veut dire ?

On considère la transformation :

$$\Phi: (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \mapsto (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

avec :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Cette transformation est **localement inversible** si on peut trouver la fonction réciproque :

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p)$$

Autrement dit :

Est-ce qu'en connaissant les p_i , on peut retrouver les vitesses $\dot{q}_i$?

Étape 1 : La "matrice jacobienne", c'est quoi ?

La **matrice jacobienne** décrit **comment une fonction change** quand on fait **varier** ses **variables d'entrée**.

Ici, la fonction est :

$$p_i = f_i(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

La matrice jacobienne sera donc :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}_2} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}_n} \\ \frac{\partial p_2}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial p_2}{\partial \dot{q}_2} & \cdots & \frac{\partial p_2}{\partial \dot{q}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_n}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial p_n}{\partial \dot{q}_2} & \cdots & \frac{\partial p_n}{\partial \dot{q}_n} \end{pmatrix}$$

Étape 2 : Dans notre cas particulier

On sait que :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Donc :

$$\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$$

C'est exactement la **matrice Hessienne** du **Lagrangien** (par rapport aux vitesses).

On la note :

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$$

Étape 3 : Pourquoi regarder le déterminant de cette matrice ?

Si le **déterminant du Jacobien** (ou du **Hessien** ici) est **non nul**, cela signifie que la fonction $p_i = f_i(\dot{q}_j)$ varie de manière **indépendante** dans chaque direction.

Donc on peut **résoudre** les équations pour retrouver les vitesses :

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p)$$

En résumé :

- $\det J \neq 0 \rightarrow$ la transformation est **inversible**.
- $\det J = 0 \rightarrow$ il y a **dépendance** entre les vitesses pas d'inverse

Example 5

Prenons Lagrangien d'un système à deux coordonnées :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

Est ce que la relation entre $\dot{q}_i$ et p_i est **inversible** ?

autrement dit: la transformation est inversible ou non ?

Example 6

Prenons Lagrangien d'un système à deux coordonnées :

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

La transformation est inversible ou non ?

3. Variables canoniques et crochets de Poisson

Dans le formalisme de Hamilton, chaque système est décrit par des **paires de variables canoniques** :

$$(q_i, p_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

La dynamique du système s'écrit entièrement à l'aide de ces paires à travers les **équations de Hamilton** :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

Mais pour manipuler plus facilement ces grandeurs et leurs relations, on introduit un nouvel outil : le **crochet de Poisson**.

3.1. Définition du crochet de Poisson

Soient deux fonctions $F(q_i, p_i, t)$ et $G(q_i, p_i, t)$, qui dépendent des **coordonnées généralisées** q_i , et des **moments conjugués** p_i avec ($i = 1, 2, \dots, n$).

Le **crochet de Poisson** entre F et G est défini par :

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

Le crochet de Poisson mesure **comment deux grandeurs** “**changent l'une par rapport à l'autre**” dans l'espace des phases (q_i, p_i) .

3.2. Lien de l'Hamiltonien avec le crochet de Poisson

Prenons **une fonction quelconque** $F(q_i, p_i, t)$ qui dépend du temps par l'intermédiaire de q_i et p_i . Sa dérivée totale dans le temps est :

$$dF = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dt}{dt}$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Remplaçons $\dot{q}_i$ et $\dot{p}_i$ grâce aux équations de Hamilton

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Mais... le grand terme entre parenthèses, c'est **exactement** le **crochet de Poisson** $\{F, H\}$.

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Example 7

L'Hamiltonien d'un oscillateur harmonique (1D) est donner par :

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 ; \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} ; \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq.$$

- 1) Calcule **par deux méthodes** (directe et crochet de Poisson) la dérivée temporelle de $F(p, q) = q^2$ pour l'Hamiltonien d'un oscillateur harmonique (1D)
- 2) Même question pour : $F(q, p) = qp$ et pour $F(p, q) = p^2$

4. Les Transformations Canoniques

En mécanique Hamiltonienne, on décrit l'état d'un système par des **variables canoniques** (q_i, p_i) .

Une **transformation canonique** consiste à **changer ces variables**

$$(q_i, p_i) \longrightarrow (Q_i, P_i)$$

tout en **gardant la forme des équations de Hamilton** :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad ; \quad \dot{P}_i = - \frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

où $K(Q, P, t)$ est le nouvel Hamiltonien.

Donc, une transformation canonique est un **changement de variables** qui **conserve** la structure hamiltonienne.

4.1. Condition de canonicité

Une transformation est **canonique** si elle **conserve** le **crochet de Poisson fondamental** :

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}, \{Q_i, Q_j\} = 0, \{P_i, P_j\} = 0$$

Example 8

Tester de canonicité de la transformation suivante:

$$\begin{aligned} Q &= \alpha q \\ P &= \frac{p}{\alpha} \end{aligned}$$

avec α constante non nulle.

Example 9

Soit de la transformation suivante:

$$Q = q \cos \theta + \frac{p}{m\omega} \sin \theta$$

$$P = -m\omega q \sin \theta + p \cos \theta$$

C'est une **rotation** de l'espace (q, p) d'angle θ .

Tester la canonicité de cette transformation.

Example 10

Soit de la transformation suivante:

$$Q = q^2$$

$$P = p$$

Tester la canonicité de cette transformation.

5. La méthode de Hamilton-Jacobi.

En mécanique de Lagrange et de Hamilton, on décrit le mouvement par les équations différentielles :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Mais l'idée de Hamilton–Jacobi est différente :

Trouver une **fonction unique** $S(q, t)$ qui contient toute la dynamique du système.

Cette fonction S s'appelle **l'action principale**.

L'action est : $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$

$$dS = L dt$$

$$H = p_i \dot{q}_i - L \Leftrightarrow L = p_i \dot{q}_i - H$$

$$dS = (p_i \dot{q}_i - H) dt$$

$$dS = p_i \dot{q}_i dt - H dt$$

Puisque: $dq_i = \dot{q}_i dt$, alors : $dS = p_i dq_i - H dt$

La différentielle totale: $dS = \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial t} dt$

$$\begin{cases} dS = p_i dq_i - H dt \\ dS = \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial t} dt \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \Leftrightarrow H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

et voilà **l'équation de Hamilton-Jacobi**

5.1. Séparation des variables de $S(q, t)$

- On part de l'équation générale de **H–J** : $H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$.
- Prenant un Cas simple : l'Hamiltonien **ne dépend pas explicitement du temps** : $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$, où $V(q)$ ne dépend que de q , pas de t .
- L'idée naturelle est donc de chercher une solution S où E (**énergie**) apparaît **comme constante de séparation**.
- On suppose que $S(q, t)$ peut s'écrire comme la somme

$$S(q, t) = W(q) + T(t),$$

où W dépend seulement de q , et T seulement de t .

On remplace dans l'équation **H-J** : $H \left(q, \frac{dW}{dq} \right) + \frac{dT}{dt} = 0$.

$$H \left(q, \frac{dW}{dq} \right) + \frac{dT}{dt} = 0 \rightarrow \begin{cases} H \left(q, \frac{dW}{dq} \right) = E \\ \frac{dT}{dt} = -E \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} H \left(q, \frac{dW}{dq} \right) = E \\ T = -Et \end{cases}$$

$$S(q, t) = W(q) - Et$$

Interprétation physique de $S(q, t) = W(q) - Et$

- E est l'énergie totale du système.
- $W(q)$ encode la partie « spatiale » (comment l'action varie avec la position).
- $-Et$ encode la partie « temporelle » (comment l'action évolue dans le temps).

Autrement dit :

On sépare le problème en **une équation spatiale** $W(q) = H(q, p) = E$
et **une partie temporelle** simple $-Et$.

$$S(q, t) = W(q) - Et$$

Example 11

Écrire et résoudre les équations de *Hamilton-Jacobi* ($H - J$) pour chaque Hamiltonien des cas suivants :

$$1) H = \frac{p^2}{2m}$$

$$2) H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$

$$3) H = \frac{p^2}{2m} + mgq$$

6. L'espace des phases

- L'espace des phases est l'espace abstrait dont les coordonnées sont :

$$(q_i, p_i), i = 1, \dots, n$$

pour un système à n degrés de liberté.

- L'évolution temporelle du système correspond à une **trajectoire** dans cet espace.
- Autrement dit : le mouvement dans le monde réel **devient une courbe dans l'espace des phases.**

Example 12

Soit les Hamiltoniens suivants :

1) $H = \frac{p^2}{2m}$ (Hamiltonien d'une Particule libre à une dimension)

2) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$ (Hamiltonien d'un Oscillateur harmonique)

3) $H = \frac{p^2}{2mL^2} + \frac{1}{2}mgL\theta^2$ (Hamiltonien d'un Pendule simple
(approximation petit angle))

Quelle est **la courbe dans l'espace des phases** de ces mouvements du monde réel?