

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

f est **dérivable sur I** si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f , elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

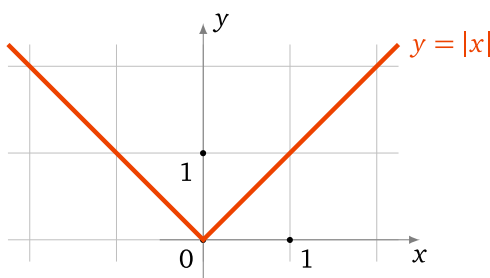
Proposition

Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .
- Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I .

Remarque.

La réciproque est **fausse** : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



En effet, le taux d'accroissement de $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$ vérifie :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Il y a bien une limite à droite (qui vaut +1), une limite à gauche (qui vaut -1) mais elles ne sont pas égales : il n'y a pas de limite en 0. Ainsi f n'est pas dérivable en $x = 0$.

Cela se lit aussi sur le dessin, il y a une demi-tangente à droite, une demi-tangente à gauche, mais elles ont des directions différentes.

2. Calcul des dérivées

2.1. Somme, produit,...

Proposition

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I . Alors pour tout $x \in I$:

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ (si $f(x) \neq 0$)
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (si $g(x) \neq 0$)

Remarque.

Il est plus facile de mémoriser les égalités de fonctions :

$$(f + g)' = f' + g' \quad (\lambda f)' = \lambda f' \quad (f \times g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Démonstration. Prouvons par exemple $(f \times g)' = f'g + fg'$.

Fixons $x_0 \in I$. Nous allons réécrire le taux d'accroissement de $f(x) \times g(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$ la fonction $f \times g$ est dérivable sur I de dérivée $f'g + fg'$.

2.2. Dérivée de fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître, x est une variable. Le tableau de droite est celui des compositions (voir paragraphe suivant), u représente une fonction $x \mapsto u(x)$.

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
\sqrt{u}	$\frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Remarque.

- Notez que les formules pour x^n , $\frac{1}{x}$, \sqrt{x} et x^α sont aussi des conséquences de la dérivée de l'exponentielle. Par exemple $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ et donc

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \frac{d}{dx}(e^{\alpha \ln x}) = \alpha \frac{1}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha \frac{1}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

- Si vous devez dériver une fonction avec un exposant dépendant de x il faut absolument repasser à la forme exponentielle. Par exemple si $f(x) = 2^x$ alors on réécrit d'abord $f(x) = e^{x \ln 2}$ pour pouvoir calculer $f'(x) = \ln 2 \cdot e^{x \ln 2} = \ln 2 \cdot 2^x$.

2.3. Composition

Proposition

Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x de dérivée :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Démonstration. Faisons l'hypothèse que $f(x) \neq f(x_0)$ pour x proche de x_0 (avec $x \neq x_0$). La preuve est alors similaire à celle ci-dessus pour le produit en écrivant cette fois :

$$\begin{aligned} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} g'(f(x_0)) \times f'(x_0). \end{aligned}$$

Exemple

Calculons la dérivée de $\ln(1 + x^2)$. Nous avons $g(x) = \ln(x)$ avec $g'(x) = \frac{1}{x}$; et $f(x) = 1 + x^2$ avec $f'(x) = 2x$. Alors la dérivée de $\ln(1 + x^2) = g \circ f(x)$ est

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(1 + x^2) \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Corollaire

Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \rightarrow J$ dérivable et bijective dont on note $f^{-1} : J \rightarrow I$ la bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

2.4. Dérivées successives

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la **dérivée seconde** de f . Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

Si la **dérivée n -ième** $f^{(n)}$ existe on dit que f est **n fois dérivable**.

Théorème (Formule de Leibniz).

$$(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \dots + \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} + \dots + f \cdot g^{(n)}$$

Autrement dit :

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

La démonstration est similaire à celle de la formule du binôme de Newton et les coefficients que l'on obtient sont les mêmes.

Exemple

Calculons les dérivées n -ème de $\exp(x) \cdot (x^2 + 1)$ pour tout $n \geq 0$. Notons $f(x) = \exp(x)$ alors $f'(x) = \exp(x)$, $f''(x) = \exp(x)$, ..., $f^{(k)}(x) = \exp(x)$. Notons $g(x) = x^2 + 1$ alors $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$ et pour $k \geq 3$, $g^{(k)}(x) = 0$.

Appliquons la formule de Leibniz :

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \cdot g(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) \cdot g^{(1)}(x) + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x) \cdot g^{(2)}(x) + \binom{n}{3} f^{(n-3)}(x) \cdot g^{(3)}(x) + \dots$$

On remplace $f^{(k)}(x) = \exp(x)$ et on sait que $g^{(3)}(x) = 0$, $g^{(4)}(x) = 0$, ... Donc cette somme ne contient que les trois premiers termes :

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \exp(x) \cdot (x^2 + 1) + \binom{n}{1} \exp(x) \cdot 2x + \binom{n}{2} \exp(x) \cdot 2.$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \exp(x) \cdot (x^2 + 2nx + n(n-1) + 1).$$

3. Extremum local, théorème de Rolle

3.1. Extremum local

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I .

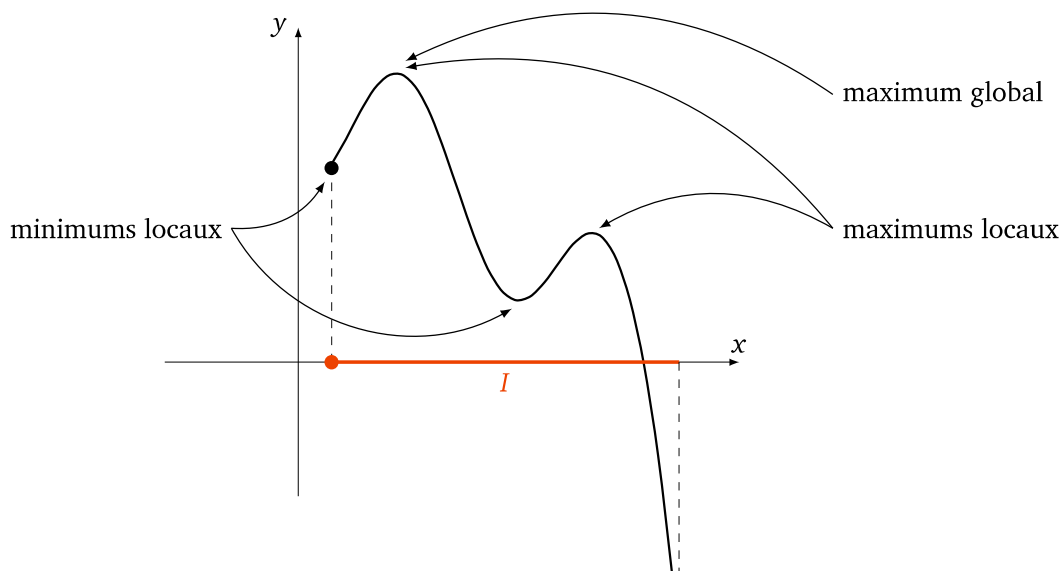
Définition

- On dit que x_0 est un **point critique** de f si $f'(x_0) = 0$.
- On dit que f admet un **maximum local en x_0** (resp. un **minimum local en x_0**) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que

$$\text{pour tout } x \in I \cap J \quad f(x) \leq f(x_0)$$

(resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

- On dit que f admet un **extremum local en x_0** si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.

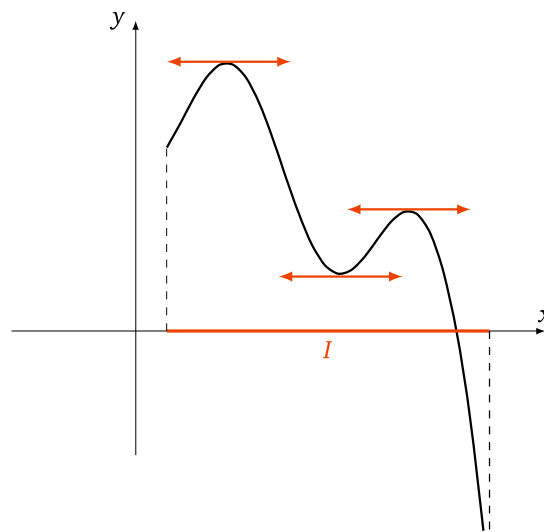


Dire que f a un maximum local en x_0 signifie que $f(x_0)$ est la plus grande des valeurs $f(x)$ pour les x proches de x_0 . On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet un **maximum global** en x_0 si pour toutes les autres valeurs $f(x)$, $x \in I$, on a $f(x) \leq f(x_0)$ (on ne regarde donc pas seulement les $f(x)$ pour x proche de x_0). Bien sûr un maximum global est aussi un maximum local, mais la réciproque est fausse.

Théorème

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

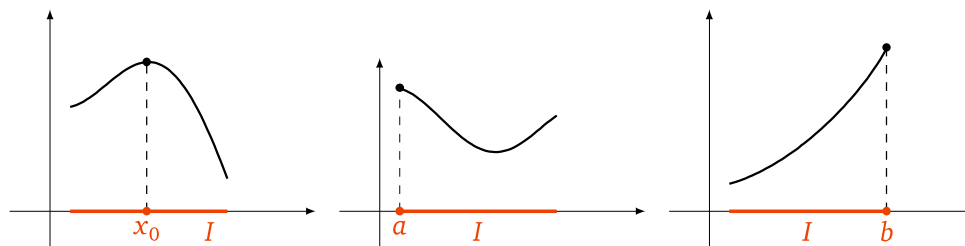
En d'autres termes, un maximum local (ou un minimum local) x_0 est toujours un point critique. Géométriquement, au point $(x_0, f(x_0))$ la tangente au graphe est horizontale.



Remarque.

1. La réciproque du théorème 2 est fausse. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais $x_0 = 0$ n'est ni maximum local ni un minimum local.
2. L'intervalle du théorème 2 est ouvert. Pour le cas d'un intervalle fermé, il faut faire attention aux extrémités. Par exemple si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable qui admet un extremum en x_0 , alors on est dans l'une des situations suivantes :
 - $x_0 = a$,
 - $x_0 = b$,
 - $x_0 \in]a, b[$ et dans ce cas on a bien $f'(x_0) = 0$ par le théorème 2.

Aux extrémités on ne peut rien dire pour $f'(a)$ et $f'(b)$, comme le montre les différents maximums sur les dessins suivants.



3. Pour déterminer $\max_{[a,b]} f$ et $\min_{[a,b]} f$ (où $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable) il faut comparer les valeurs de f aux différents points critiques et en a et en b .

Preuve du théorème. Supposons que x_0 soit un maximum local de f , soit donc J l'intervalle ouvert de la définition contenant x_0 tel que pour tout $x \in I \cap J$ on a $f(x) \leq f(x_0)$.

- Pour $x \in I \cap J$ tel que $x < x_0$ on a $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et $x - x_0 < 0$ donc $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ et donc à la limite $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.
- Pour $x \in I \cap J$ tel que $x > x_0$ on a $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et $x - x_0 > 0$ donc $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ et donc à la limite $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

Or f est dérivable en x_0 donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

La première limite est positive, la seconde est négative, la seule possibilité est que $f'(x_0) = 0$.

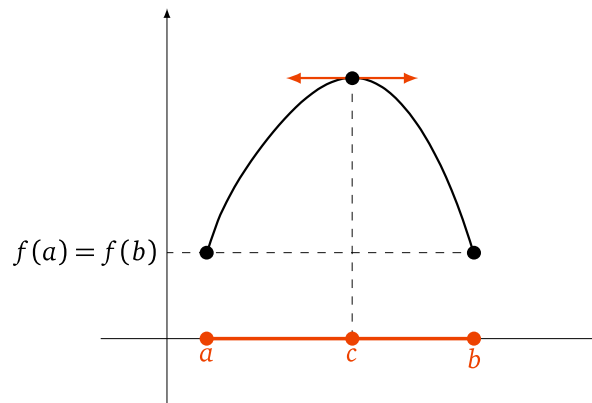
3.2. Théorème de Rolle

Théorème (Théorème de Rolle).

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

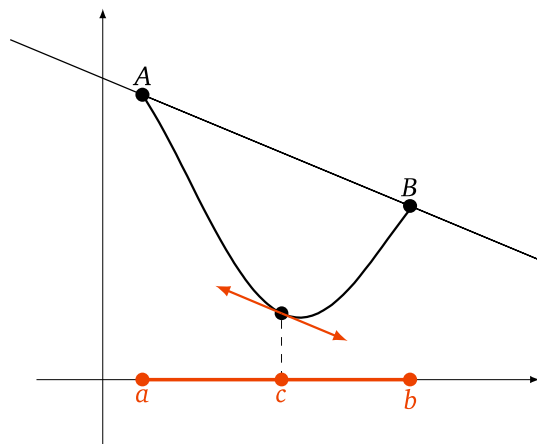
4. Théorème des accroissements finis

4.1. Théorème des accroissements finis

Théorème (Théorème des accroissements finis).

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c) (b - a)$$



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

4.2. Fonction croissante et dérivée

Corollaire

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geq 0 \iff f \text{ est croissante ;}$
2. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \leq 0 \iff f \text{ est décroissante ;}$
3. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) = 0 \iff f \text{ est constante ;}$
4. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) > 0 \implies f \text{ est strictement croissante ;}$
5. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) < 0 \implies f \text{ est strictement décroissante.}$

Remarque.

La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fausse. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Démonstration. Prouvons par exemple (1).

Sens \implies . Supposons d'abord la dérivée positive. Soient $x, y \in]a, b[$ avec $x \leq y$. Alors par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Mais $f'(c) \geq 0$ et $x - y \leq 0$ donc $f(x) - f(y) \leq 0$. Cela implique que $f(x) \leq f(y)$. Ceci étant vrai pour tout x, y alors f est croissante.

Sens \impliedby . Réciproquement, supposons que f est croissante. Fixons $x \in]a, b[$. Pour tout $y > x$ nous avons $y - x > 0$ et $f(y) - f(x) \geq 0$, ainsi le taux d'accroissement vérifie $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$. À la limite, quand $y \rightarrow x$, ce taux d'accroissement tend vers la dérivée de f en x et donc $f'(x) \geq 0$.

4.3. Règle de l'Hospital

Corollaire (Règle de l'Hospital).

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$.

$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\ell \in \mathbb{R}) \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$
--

Démonstration. Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ avec par exemple $a < x_0$. Soit $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. Alors

- h est continue sur $[a, x_0] \subset I$,
- h est dérivable sur $]a, x_0[$,
- $h(x_0) = h(a) = 0$.

Donc par le théorème de Rolle il existe $c_a \in]a, x_0[$ tel que $h'(c_a) = 0$. Or $h'(x) = g(a)f'(x) - f(a)g'(x)$ donc $g(a)f'(c_a) - f(a)g'(c_a) = 0$. Comme g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$ cela conduit à $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)}$. Comme $a < c_a < x_0$ lorsque l'on fait tendre a vers x_0 on obtient $c_a \rightarrow x_0$. Cela implique

$$\lim_{a \rightarrow x_0} \frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{a \rightarrow x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \lim_{c_a \rightarrow x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \ell.$$

Exemple

Calculer la limite en 1 de $\frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$. On vérifie que :

- $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$, $f(1) = 0$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$,
- $g(x) = \ln(x)$, $g(1) = 0$, $g'(x) = \frac{1}{x}$,
- Prenons $I =]0, 1]$, $x_0 = 1$, alors g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 3.$$

Donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 3.$$