

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Soit  $x_0 \in I$ .

$f$  est **dérivable sur  $I$**  si  $f$  est dérivable en tout point  $x_0 \in I$ . La fonction  $x \mapsto f'(x)$  est la **fonction dérivée** de  $f$ , elle se note  $f'$  ou  $\frac{df}{dx}$ .

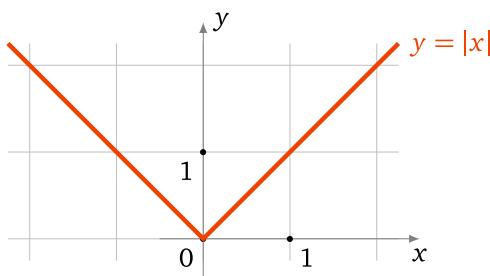
### Proposition

Soit  $I$  un intervalle ouvert,  $x_0 \in I$  et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

- Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  alors  $f$  est continue en  $x_0$ .
- Si  $f$  est dérivable sur  $I$  alors  $f$  est continue sur  $I$ .

#### Remarque.

La réciproque est **fausse** : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



En effet, le taux d'accroissement de  $f(x) = |x|$  en  $x_0 = 0$  vérifie :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Il y a bien une limite à droite (qui vaut +1), une limite à gauche (qui vaut -1) mais elles ne sont pas égales : il n'y a pas de limite en 0. Ainsi  $f$  n'est pas dérivable en  $x = 0$ .

Cela se lit aussi sur le dessin, il y a une demi-tangente à droite, une demi-tangente à gauche, mais elles ont des directions différentes.

## 2. Calcul des dérivées

### 2.1. Somme, produit,...

#### Proposition

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables sur  $I$ . Alors pour tout  $x \in I$  :

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$  où  $\lambda$  est un réel fixé
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$  (si  $f(x) \neq 0$ )
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$  (si  $g(x) \neq 0$ )

### Remarque.

Il est plus facile de mémoriser les égalités de fonctions :

$$(f + g)' = f' + g' \quad (\lambda f)' = \lambda f' \quad (f \times g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

*Démonstration.* Prouvons par exemple  $(f \times g)' = f'g + fg'$ .

Fixons  $x_0 \in I$ . Nous allons réécrire le taux d'accroissement de  $f(x) \times g(x)$  :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout  $x_0 \in I$  la fonction  $f \times g$  est dérivable sur  $I$  de dérivée  $f'g + fg'$ .

## 2.2. Dérivée de fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître,  $x$  est une variable. Le tableau de droite est celui des compositions (voir paragraphe suivant),  $u$  représente une fonction  $x \mapsto u(x)$ .

Fonction	Dérivée
$x^n$	$nx^{n-1}$ ( $n \in \mathbb{Z}$ )
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$ ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )
$e^x$	$e^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
$u^n$	$nu'u^{n-1}$ ( $n \in \mathbb{Z}$ )
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$
$u^\alpha$	$\alpha u'u^{\alpha-1}$ ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )
$e^u$	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

### Remarque.

- Notez que les formules pour  $x^n$ ,  $\frac{1}{x}$ ,  $\sqrt{x}$  et  $x^\alpha$  sont aussi des conséquences de la dérivée de l'exponentielle. Par exemple  $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$  et donc

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \frac{d}{dx}(e^{\alpha \ln x}) = \alpha \frac{1}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha \frac{1}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

- Si vous devez dériver une fonction avec un exposant dépendant de  $x$  il faut absolument repasser à la forme exponentielle. Par exemple si  $f(x) = 2^x$  alors on réécrit d'abord  $f(x) = e^{x \ln 2}$  pour pouvoir calculer  $f'(x) = \ln 2 \cdot e^{x \ln 2} = \ln 2 \cdot 2^x$ .

## 2.3. Composition

### Proposition

Si  $f$  est dérivable en  $x$  et  $g$  est dérivable en  $f(x)$  alors  $g \circ f$  est dérivable en  $x$  de dérivée :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Démonstration. Faisons l'hypothèse que  $f(x) \neq f(x_0)$  pour  $x$  proche de  $x_0$  (avec  $x \neq x_0$ ). La preuve est alors similaire à celle ci-dessus pour le produit en écrivant cette fois :

$$\begin{aligned} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} g'(f(x_0)) \times f'(x_0). \end{aligned}$$

### Exemple

Calculons la dérivée de  $\ln(1 + x^2)$ . Nous avons  $g(x) = \ln(x)$  avec  $g'(x) = \frac{1}{x}$ ; et  $f(x) = 1 + x^2$  avec  $f'(x) = 2x$ . Alors la dérivée de  $\ln(1 + x^2) = g \circ f(x)$  est

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(1 + x^2) \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

### Corollaire

Soit  $I$  un intervalle ouvert. Soit  $f : I \rightarrow J$  dérivable et bijective dont on note  $f^{-1} : J \rightarrow I$  la bijection réciproque. Si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$  alors  $f^{-1}$  est dérivable et on a pour tout  $x \in J$  :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

## 2.4. Dérivées successives

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable et soit  $f'$  sa dérivée. Si la fonction  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  est aussi dérivable on note  $f'' = (f')'$  la **dérivée seconde** de  $f$ . Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

Si la **dérivée  $n$ -ième**  $f^{(n)}$  existe on dit que  $f$  est  **$n$  fois dérivable**.

**Théorème** (Formule de Leibniz).

$$(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \cdots + \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} + \cdots + f \cdot g^{(n)}$$

Autrement dit :

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

La démonstration est similaire à celle de la formule du binôme de Newton et les coefficients que l'on obtient sont les mêmes.

## Exemple

Calculons les dérivées  $n$ -ème de  $\exp(x) \cdot (x^2 + 1)$  pour tout  $n \geq 0$ . Notons  $f(x) = \exp(x)$  alors  $f'(x) = \exp(x)$ ,  $f''(x) = \exp(x), \dots, f^{(k)}(x) = \exp(x)$ . Notons  $g(x) = x^2 + 1$  alors  $g'(x) = 2x$ ,  $g''(x) = 2$  et pour  $k \geq 3$ ,  $g^{(k)}(x) = 0$ .

Appliquons la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}(f \cdot g)^{(n)}(x) &= f^{(n)}(x) \cdot g(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) \cdot g^{(1)}(x) + \\ &\quad + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x) \cdot g^{(2)}(x) + \binom{n}{3} f^{(n-3)}(x) \cdot g^{(3)}(x) + \dots\end{aligned}$$

On remplace  $f^{(k)}(x) = \exp(x)$  et on sait que  $g^{(3)}(x) = 0, g^{(4)}(x) = 0, \dots$ . Donc cette somme ne contient que les trois premiers termes :

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \exp(x) \cdot (x^2 + 1) + \binom{n}{1} \exp(x) \cdot 2x + \binom{n}{2} \exp(x) \cdot 2.$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \exp(x) \cdot (x^2 + 2nx + n(n-1) + 1).$$

## 3. Extremum local, théorème de Rolle

### 3.1. Extremum local

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

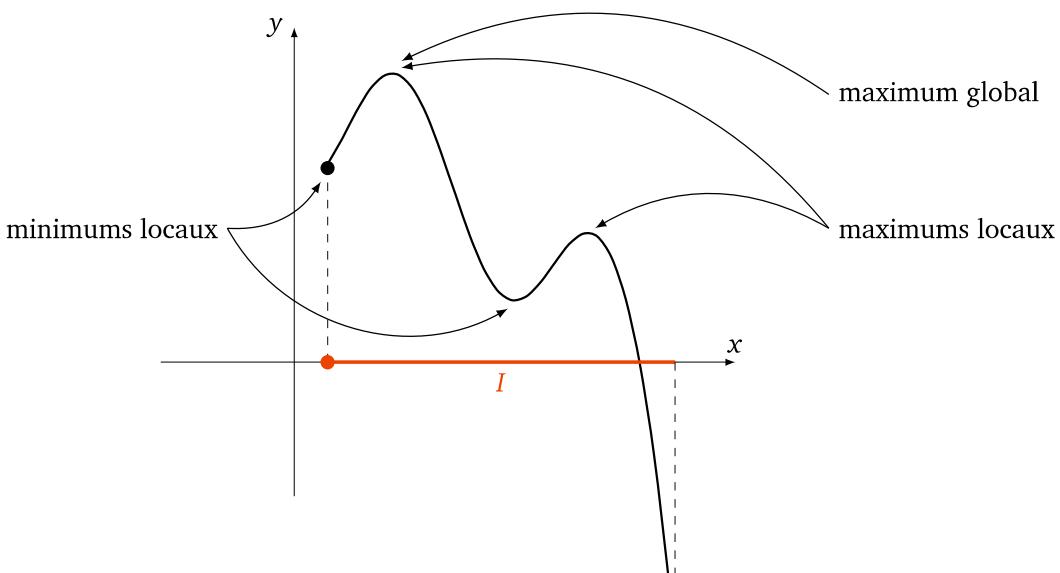
#### Définition

- On dit que  $x_0$  est un **point critique** de  $f$  si  $f'(x_0) = 0$ .
- On dit que  $f$  admet un **maximum local en  $x_0$**  (resp. un **minimum local en  $x_0$** ) s'il existe un intervalle ouvert  $J$  contenant  $x_0$  tel que

$$\text{pour tout } x \in J \cap I \quad f(x) \leq f(x_0)$$

(resp.  $f(x) \geq f(x_0)$ ).

- On dit que  $f$  admet un **extremum local en  $x_0$**  si  $f$  admet un maximum local ou un minimum local en ce point.

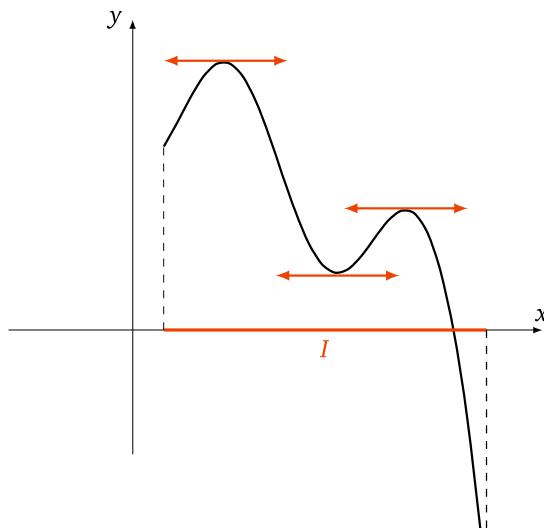


Dire que  $f$  a un maximum local en  $x_0$  signifie que  $f(x_0)$  est la plus grande des valeurs  $f(x)$  pour les  $x$  proches de  $x_0$ . On dit que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  admet un **maximum global** en  $x_0$  si pour toutes les autres valeurs  $f(x)$ ,  $x \in I$ , on a  $f(x) \leq f(x_0)$  (on ne regarde donc pas seulement les  $f(x)$  pour  $x$  proche de  $x_0$ ). Bien sûr un maximum global est aussi un maximum local, mais la réciproque est fausse.

### Théorème

Soit  $I$  un intervalle ouvert et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Si  $f$  admet un maximum local (ou un minimum local) en  $x_0$  alors  $f'(x_0) = 0$ .

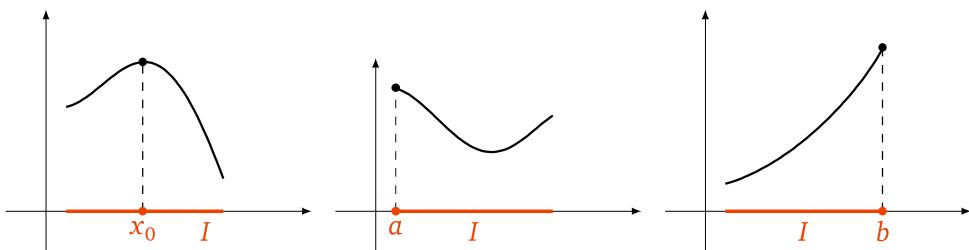
En d'autres termes, un maximum local (ou un minimum local)  $x_0$  est toujours un point critique. Géométriquement, au point  $(x_0, f(x_0))$  la tangente au graphe est horizontale.



### Remarque.

- La réciproque du théorème 2 est fausse. Par exemple la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $f(x) = x^3$  vérifie  $f'(0) = 0$  mais  $x_0 = 0$  n'est ni maximum local ni un minimum local.
- L'intervalle du théorème 2 est ouvert. Pour le cas d'un intervalle fermé, il faut faire attention aux extrémités. Par exemple si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction dérivable qui admet un extremum en  $x_0$ , alors on est dans l'une des situations suivantes :
  - $x_0 = a$ ,
  - $x_0 = b$ ,
  - $x_0 \in ]a, b[$  et dans ce cas on a bien  $f'(x_0) = 0$  par le théorème 2.

Aux extrémités on ne peut rien dire pour  $f'(a)$  et  $f'(b)$ , comme le montre les différents maximums sur les dessins suivants.



3. Pour déterminer  $\max_{[a,b]} f$  et  $\min_{[a,b]} f$  (où  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction dérivable) il faut comparer les valeurs de  $f$  aux différents points critiques et en  $a$  et en  $b$ .

*Preuve du théorème.* Supposons que  $x_0$  soit un maximum local de  $f$ , soit donc  $J$  l'intervalle ouvert de la définition contenant  $x_0$  tel que pour tout  $x \in I \cap J$  on a  $f(x) \leq f(x_0)$ .

- Pour  $x \in I \cap J$  tel que  $x < x_0$  on a  $f(x) - f(x_0) \leq 0$  et  $x - x_0 < 0$  donc  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$  et donc à la limite  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ .
- Pour  $x \in I \cap J$  tel que  $x > x_0$  on a  $f(x) - f(x_0) \leq 0$  et  $x - x_0 > 0$  donc  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$  et donc à la limite  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ .

Or  $f$  est dérivable en  $x_0$  donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

La première limite est positive, la seconde est négative, la seule possibilité est que  $f'(x_0) = 0$ .

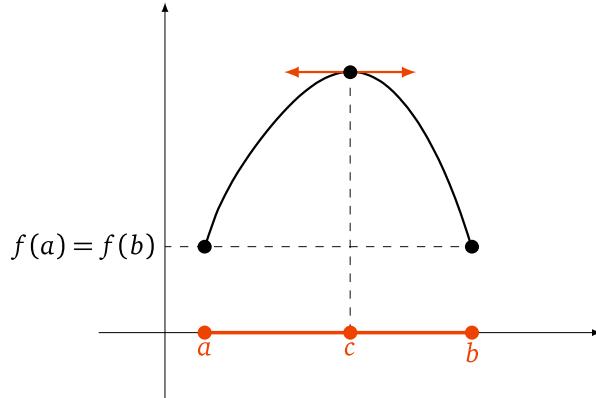
## 3.2. Théorème de Rolle

**Théorème** (Théorème de Rolle).

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

- $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,
- $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ ,
- $f(a) = f(b)$ .

Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de  $f$  où la tangente est horizontale.

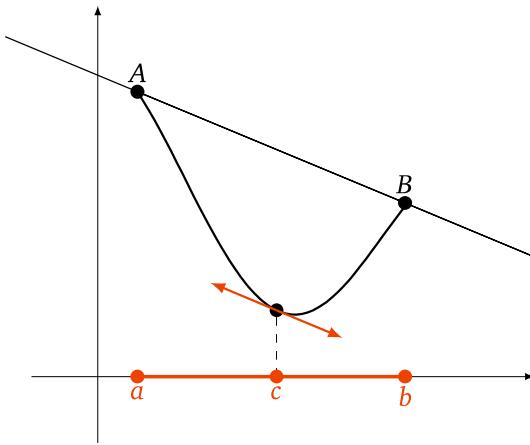
## 4. Théorème des accroissements finis

### 4.1. Théorème des accroissements finis

**Théorème** (Théorème des accroissements finis).

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de  $f$  où la tangente est parallèle à la droite  $(AB)$  où  $A = (a, f(a))$  et  $B = (b, f(b))$ .

## 4.2. Fonction croissante et dérivée

### Corollaire

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ .

1.  $\forall x \in ]a, b[ \quad f'(x) \geq 0 \iff f \text{ est croissante} ;$
2.  $\forall x \in ]a, b[ \quad f'(x) \leq 0 \iff f \text{ est décroissante} ;$
3.  $\forall x \in ]a, b[ \quad f'(x) = 0 \iff f \text{ est constante} ;$
4.  $\forall x \in ]a, b[ \quad f'(x) > 0 \implies f \text{ est strictement croissante} ;$
5.  $\forall x \in ]a, b[ \quad f'(x) < 0 \implies f \text{ est strictement décroissante} .$

### Remarque.

La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fausse. Par exemple la fonction  $x \mapsto x^3$  est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

*Démonstration.* Prouvons par exemple (1).

Sens  $\implies$ . Supposons d'abord la dérivée positive. Soient  $x, y \in ]a, b[$  avec  $x \leq y$ . Alors par le théorème des accroissements finis, il existe  $c \in ]x, y[$  tel que  $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ . Mais  $f'(c) \geq 0$  et  $x - y \leq 0$  donc  $f(x) - f(y) \leq 0$ . Cela implique que  $f(x) \leq f(y)$ . Ceci étant vrai pour tout  $x, y$  alors  $f$  est croissante.

Sens  $\impliedby$ . Réciproquement, supposons que  $f$  est croissante. Fixons  $x \in ]a, b[$ . Pour tout  $y > x$  nous avons  $y - x > 0$  et  $f(y) - f(x) \geq 0$ , ainsi le taux d'accroissement vérifie  $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$ . À la limite, quand  $y \rightarrow x$ , ce taux d'accroissement tend vers la dérivée de  $f$  en  $x$  et donc  $f'(x) \geq 0$ .

## 4.3. Règle de l'Hospital

### Corollaire (Règle de l'Hospital).

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables et soit  $x_0 \in I$ . On suppose que

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ,
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$ .

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R}) \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

*Démonstration.* Fixons  $a \in I \setminus \{x_0\}$  avec par exemple  $a < x_0$ . Soit  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$ . Alors

- $h$  est continue sur  $[a, x_0] \subset I$ ,
- $h$  est dérivable sur  $]a, x_0[$ ,
- $h(x_0) = h(a) = 0$ .

Donc par le théorème de Rolle il existe  $c_a \in ]a, x_0[$  tel que  $h'(c_a) = 0$ . Or  $h'(x) = g(a)f'(x) - f(a)g'(x)$  donc  $g(a)f'(c_a) - f(a)g'(c_a) = 0$ . Comme  $g'$  ne s'annule pas sur  $I \setminus \{x_0\}$  cela conduit à  $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)}$ . Comme  $a < c_a < x_0$  lorsque l'on fait tendre  $a$  vers  $x_0$  on obtient  $c_a \rightarrow x_0$ . Cela implique

$$\lim_{a \rightarrow x_0} \frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{a \rightarrow x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \lim_{c_a \rightarrow x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \ell.$$

### Exemple

Calculer la limite en 1 de  $\frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$ . On vérifie que :

- $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$ ,  $f(1) = 0$ ,  $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$ ,
- $g(x) = \ln(x)$ ,  $g(1) = 0$ ,  $g'(x) = \frac{1}{x}$ ,
- Prenons  $I = ]0, 1]$ ,  $x_0 = 1$ , alors  $g'$  ne s'annule pas sur  $I \setminus \{x_0\}$ .

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 3.$$

Donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 3.$$