Travail et énergie

1 – Introduction

- L'objet de ce chapitre est la traduction énergétique du principe fondamental de la dynamique.

- L'énergie se manifeste sous des formes diverses (calorifique, chimique, électromagnétique, électrique, nucléaire, mécanique, ...). Les diverses formes d'énergie peuvent se transformer l'une en l'autre, ses échanges d'énergie sont généralement irréversibles.

- Dans ce chapitre nous allons introduire aussi les notions de travail et puissance d'une force, ainsi que les diverses formes d'énergie (énergie potentielle, énergie cinétique et énergie mécanique).

- Enfin, nous verrons que ces notions et les relations qui les relient peuvent être utilisées pour résoudre simplement des problèmes de mécanique.

2 – Travail d'une force et Puissance

- Considérons un objet assimilé à un point matériel G se déplaçant sur une portion de droite, d'un point (A) à un point (B), et soumis à une force $\vec{F}$ constante au cours du déplacement (figure 1).

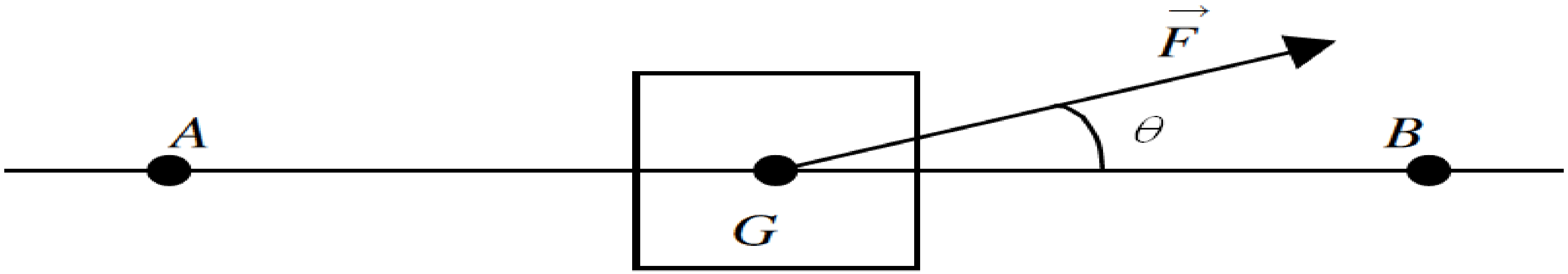


Figure 1 : *Déplacement du point d'application d'une force sur un chemin rectiligne.*

- Par définition, le travail d'une force $\vec{F}$ constante sur un déplacement rectiligne $\overrightarrow{AB}$ $(\overrightarrow{AB} = \vec{r})$ est égal au produit scalaire du vecteur force par le vecteur déplacement :

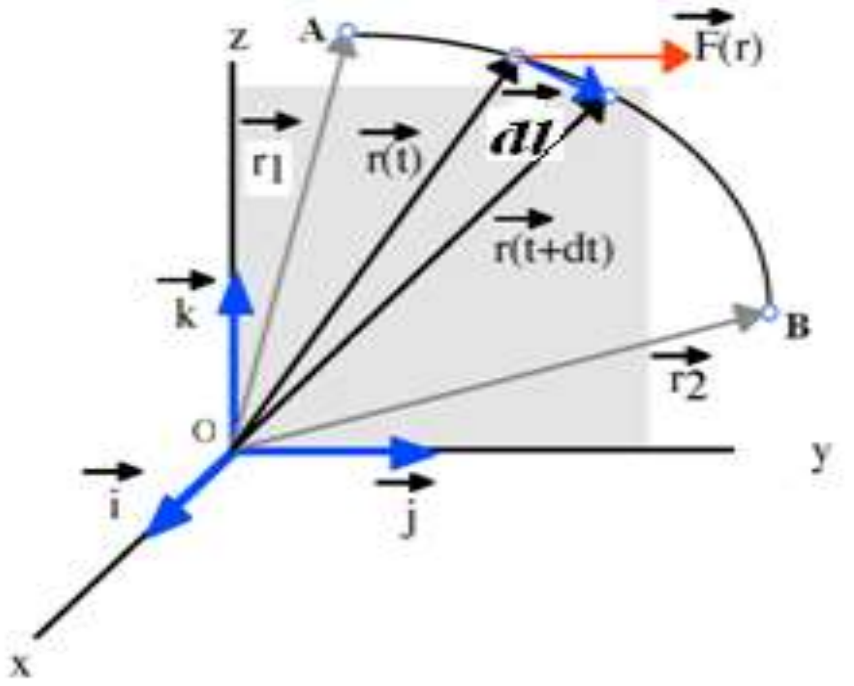
$$W_{A\to B} = \vec{F}.\vec{r} = F.r.\cos\theta \;; \qquad \text{avec } \theta \text{ l'angle que fait } \vec{F} \text{ avec } \vec{r}.$$

Le travail est soit positif, nul ou négatif selon la direction de la force $\vec{F}$ par rapport au déplacement :

- Si $\vec{F}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{AB} = \vec{r}$) le travail est nul, la force $\vec{F}$ ne contribuant pas à déplacer l'objet.
- Lorsque la force s'oppose au déplacement, elle est résistante et le travail est négatif.
- Lorsque la force est motrice le travail est positif.

2-1- Travail élémentaire

Un mobile se déplace dans l'espace de la position (***A***) à (***B***) sous l'action d'une force $\vec{F}(r)$. Entre les instant t et $t + dt$, le mobile à effectué un déplacement élémentaire de vecteur $d\vec{l}$.



Le travail élémentaire dW effectué par le vecteur force $\vec{F}(r)$ pendant ce déplacement élémentaire est défini par le produit scalaire : $\boxed{dW = \vec{F}.d\vec{l}}$

Comme : $d\vec{l} = \vec{V}\,dt$ (où $\vec{V}$ est le vecteur Vitesse), on a aussi $dW = \vec{F}.\vec{V}\,dt$

Pour un déplacement total de A (à l'instant t_A) à B (à l'instant t_B) tout au long de la Courbe, on obtient les expressions :

$W_{\widehat{AB}} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_A^B \|\vec{F}\|.\cos(\vec{F},d\vec{l})dl$; ou

$$W_{\widehat{AB}} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}.\vec{V}dt = \int_A^B \|\vec{F}\|.\|\vec{V}\| \cos(\vec{F},\vec{V}).dt$$

Dans le système SI, on exprime le travail en newton-mètre, unité appelée joule. Un joule est donc le travail effectué par une force d'un newton quand elle déplace une particule d'un mètre dans la direction de la force. La dimension et l'unité du joule sont : $J = Nm = m^2\,kg\,s^{-2}$; $[J] = L^2MT^{-2}$.

On note que la quantité $\frac{dw}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$ est homogène à une puissance

2-2- Puissance

Dans certaines applications pratiques, concernant en particulier les machines, il est important de connaître la vitesse à laquelle le travail est fait. La puissance instantanée est définit par :

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Autrement dit la puissance est définie comme le travail par unité de temps pendant un très petit intervalle dt.

$$P = \vec{F}.\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

La puissance peut ainsi être définie comme le produit de la force par le vitesse.

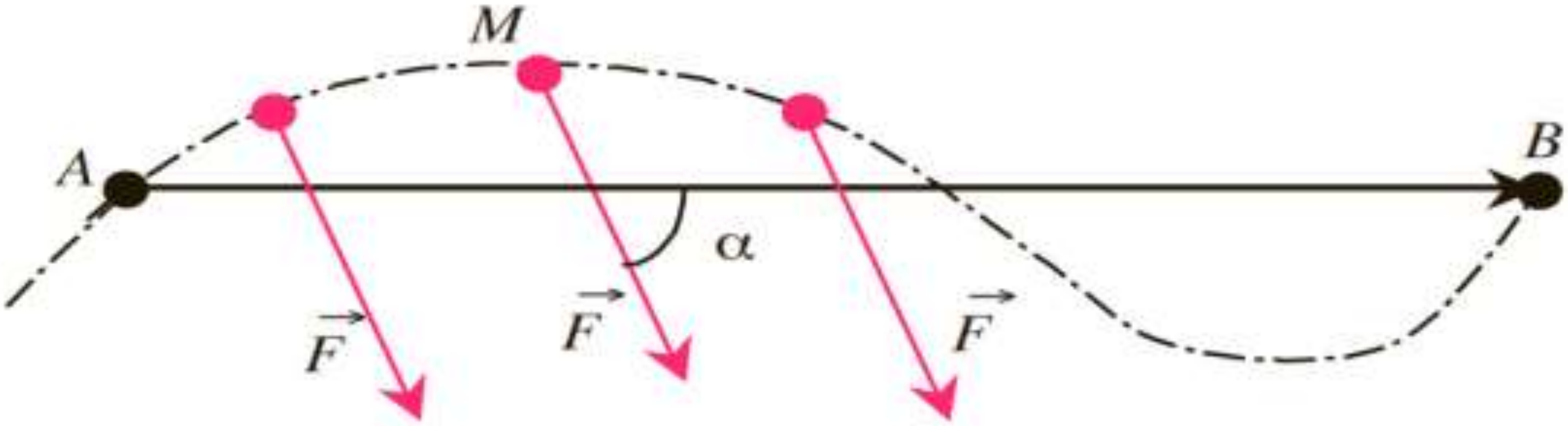
Dans le système SI la puissance s'exprime en joule par seconde, unité appelée watt, par abréviation W.

Exemple 1

Montrer que dans le cas d'un ressort (trajet quelconque) le Travail ne dépend que des allongements initiaux et finaux.

Exemple 2

Montrer que si la force $\vec{F}$ est constante, ce qui est rare, le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale (A) et finale (B).



Exemple 3

Une force $F = 6t(N)$ agit sur une particule de masse $2\ kg$. La particule étant immobile au départ, trouver le travail effectué par la force pendant les deux premières secondes.

Exemple 4

Une particule est soumise à la force $\vec{F} = 2xy\vec{\imath} + x^2\vec{\jmath}$. Calculer le travail effectué par la force $\vec{F}$ quand la particule se déplace du point (0,0) au point (2,0) suivant une droite.

3 – Energie cinétique : une énergie liée au mouvement

Considérons un point matériel M se déplaçant, sous l'action d'un ensemble de forces extérieures. Le mouvement de ce point est régi par le principe fondamentale de la dynamique, soit : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

Au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$, la somme des travaux élémentaires des forces extérieures est donnée par :

$$\sum_{ext} \vec{F}\,.d\vec{l} = m.\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.d\vec{l} = m\vec{v}.d\vec{v}$$

Par intégration de cette relation sur un trajet AB nous obtenons :

$$m\int_{v_A}^{v_B}\vec{v}.d\vec{v} = \sum\int_A^B \vec{F}_{ext}.d\vec{l} = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{ext}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = \sum W_{A\to B}} \to (1)$$

où $v_B$est la vitesse de la particule en (B) et $v_A$celle en (A).

D'après l'équation (1), on voit qu'il est intéressant de définir une fonction d'état, ne dépendant que de la vitesse du point, appelée énergie cinétique.

Définition : On définit l'énergie cinétique E_C pour un point matériel de masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$, par :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}mv^2} \qquad \text{ou} \qquad E_C = \frac{p^2}{2m} \quad \text{puisque} \quad p = mv$$

Théorème de l'énergie cinétique : La variation d'énergie cinétique d'un point matériel, soumis à un ensemble de forces extérieures, entre une position (A) et une position (B), est égale à la somme des travaux de ces forces extérieures entre ces deux points :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{C_B} - E_{C_A} = \Delta E_C = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext})$$

Exemple 5

En utilisant les Résultats de l'exemple ***3***, calculer directement l'énergie cinétique que la particule acquiert pendant le temps ***t***.

3 – Forces conservatives et Energie potentielle

- L'énergie cinétique est définie à partir de sa variation liée au travail de toutes les forces,

- Il y a un autre type d'énergie c'est l'énergie potentielle, cette dernière va être définie à partir de sa diminution liée au travail de certaines forces :

- celles dont le travail ne dépend pas du chemin suivi.

3 – 1 – Forces conservatives : (ou forces dérivant d'une énergie potentiel)

Ce sont les forces dont le travail ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des positions initiales (point de départ) et finales (point d'arrivée), aussi une force qui dérive d'une énergie potentielle est dite « conservative ».

<u>Remarque :</u> toutes les forces ne dérivent pas forcément d'une énergie potentielle. Il faut vérifier les conditions suivantes pour dire que la force dérive d'une énergie potentielle ou non :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad , \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

en coordonnées cartésiennes.

Exemple 6

Soit :

$$\vec{F} = \big(\underbrace{y + 2.z + e^{x}}_{F_x}\big).\vec{i} + \underbrace{x}_{F_y}.\vec{j} + \underbrace{2x}_{F_z}.\vec{k}$$

Cette force est elle conservative ?

Exemple 7

Même question de l'exemple (6) pour $\vec{F} = \left(\underbrace{x^2 - y^2}_{F_x}\right).\vec{i} + \underbrace{3xy}_{F_y}.\vec{j}$

3 – 2 – Energie potentielle : une énergie liée à la position

L'énergie potentielle est une forme d'énergie liée à la position du système, telle que l'intégration entre deux valeurs prises au départ et à l'arrivée soit égale au travail fourni à la particule pour la déplacer de sa position initiale à sa position finale. Si la force $\vec{F}$ est une force dérivant d'une énergie potentielle (conservative), alors :

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = E_{P_A} - E_{P_B}}$$

Remarquons que nous écrivons $E_{P_A} - E_{P_B}$et non $E_{P_B} - E_{P_A}$; autrement dit, le travail accompli est égal à E_P au point de départ moins au point d'arrivée E_P.

$$\Delta E_P = E_{P_B} - E_{P_A} = -W_{A\to B}\left(\vec{F}_{ext}^{C}\right) \Leftrightarrow \boxed{\Delta E_P = -W_{A\to B}\left(\vec{F}_{ext}^{C}\right)}$$

$$\Delta E_P = -\int_A^B \vec{F}.d\vec{l} \qquad (2)$$

De l'expression intégrale (2), il est possible de déduire la définition différentielle de l'énergie potentielle :

$$\boxed{dE_P = -\vec{F}.d\vec{l}}$$

La différentielle de l'énergie totale peut s'exprimé par :

$$\boxed{dE_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz} \qquad (4)$$

D'un autre côté on a :

$$\overrightarrow{grad}E_P = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)E_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}E_P.d\vec{l} = \left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}\right).\left(dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}\right) \quad \text{avec: } d\vec{l} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}E_P.d\vec{l} = \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz \qquad \text{donc: } \boxed{\overrightarrow{grad}E_P.d\vec{l} = dE_P}$$

alors: $dE_P = -\vec{F}.d\vec{l} \Leftrightarrow \overrightarrow{grad}E_P.d\vec{l} = -\vec{F}.d\vec{l}$

Finalement: $\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P}$ (5)

A partir de l'équation (5) on peut dire que l'énergie potentielle est une fonction scalaire E_P des différentes coordonnées de l'espace à partir de laquelle il est possible d'en déduire un champ de force $\vec{F}$ par la relation $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_P)$. Réciproquement, une force $\vec{F}$dérive d'une énergie potentielle lorsqu'il existe une fonction E_P telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_P)$.

Exemple 8

Soit l'énergie potentielle

$$E_P = 2x^2 - xy + yz$$

Trouver l'expression de la force dans le système des coordonnées cartésiennes.

Exemple 9

La force de rappel d'un ressort s'écrit, en coordonnées cartésiennes et en considérant un système astreint à ce déplacé selon l'axe $[Ox)$ uniquement :

$$\vec{F} = -kx.\vec{\imath}$$

Donner l'expression de son énergie potentielle.

4 – Conservation de l'énergie d'une particule

Nous introduisons maintenant une nouvelle fonction particulière utile dans tous les problèmes de mécanique, l'énergie mécanique d'un système. Pour définir cette fonction, nous partons du théorème de l'énergie cinétique dans lequel nous faisons apparaître le travail des forces conservatives et celui des forces non conservatives, soit :

$$E_{C_B} - E_{C_A} = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}^{C}) + \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}^{NC})$$

avec: $\sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}^{C}) = E_{P_A} - E_{P_B}$

$$E_{C_B} - E_{C_A} = E_{P_A} - E_{P_B} + \sum W_{A\to B}(\vec{F}^{NC}{}_{ext})$$

$$E_{C_B} - E_{C_A} - E_{P_A} + E_{P_B} = \sum W_{A\to B}(\vec{F}^{NC}{}_{ext})$$

$$\left[E_{C_B} + E_{P_B}\right] - \left[E_{C_A} + E_{P_A}\right] = \sum W_{A\to B}(\vec{F}^{NC}{}_{ext}) \qquad (6)$$

Il apparaît une nouvelle fonction d'état homogène à une énergie et dont la variation s'exprime en fonction uniquement du travail des forces non conservatives. Cette nouvelle fonction correspond à l'énergie mécanique.

Définition : L'énergie mécanique d'un système est égale à la somme des énergies cinétique et potentielle. C'est une fonction d'état : $\boxed{E_M = E_C + E_P}$

Théorème de l'énergie mécanique : Du résultat (6) on en déduit le théorème suivant :

La variation d'énergie mécanique d'un système entre deux points $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées au système entre ces deux points.

$$\Delta E_M = E_{MB} - E_{MA} = \sum W_{A\rightarrow B}(\vec{F}^{NC}{}_{ext})$$

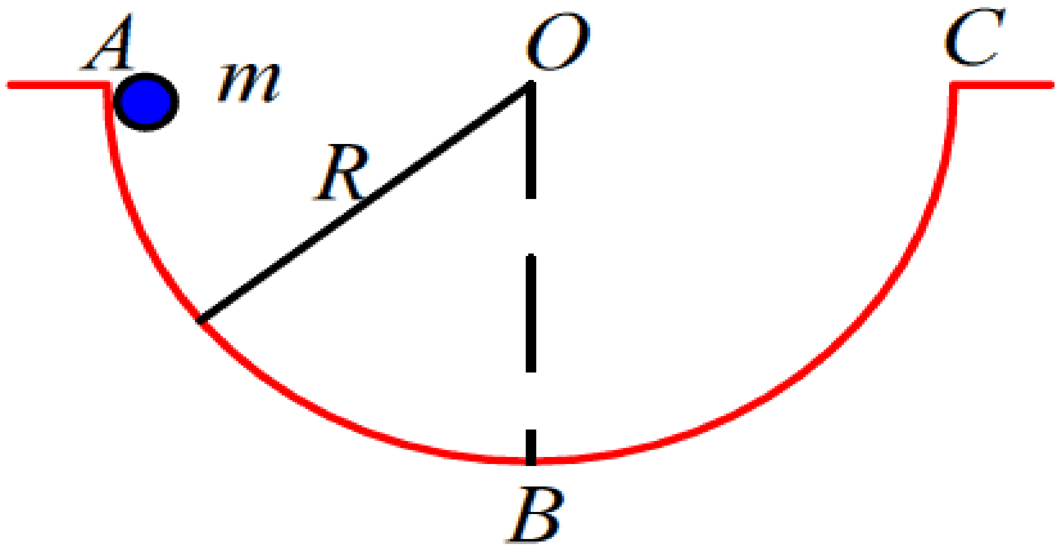
Les forces non conservatives étant des forces résistantes (W <0) l'énergie mécanique d'un système ne peut que diminuer au cours du temps.

Si un point matériel n'est soumis qu'a l'action de force conservatives, l'énergie mécanique de cette dernière est conservée au cours du temps : $E_M^A = E_M^B$

Exemple 10

Une petite boule de masse $m = 1.gr$ est abandonnée avec une vitesse initiale

$v_A = 0$ d'un point *A* situé à l'intérieur d'une sphère creuse de rayon $R = 1{,}25m$. Elle arrive au point *B* avec une vitesse $v_B = 4ms^{-1}$ (Figure 2).



$$E_p(A) = E_p(C) = 0$$

Figure 2

Prouver que cette boule est soumise à une force de frottement et estimer le travail de cette force. On prend $g = 10ms^{-2}$.