Chapitre 3

Intégrales

1. Propriétés de l'intégrale

Les trois principales propriétés de l'intégrale sont la relation de Chasles, la positivité et la linéarité.

1.1. Relation de Chasles

Proposition (Relation de Chasles).
Soient $a < c < b$. Si f est intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$. Et on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Pour s'autoriser des bornes sans se préoccuper de l'ordre on définit :

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{et pour } a < b \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Pour a, b, c quelconques la ***relation de Chasles*** devient alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

1.2. Positivité de l'intégrale

Proposition (Positivité de l'intégrale).
Soit $a \leqslant b$ deux réels et f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$.

$$\boxed{\text{Si } f \leqslant g \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx}$$

En particulier l'intégrale d'une fonction positive est positive :

$$\boxed{\text{Si} \quad f \geqslant 0 \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0}$$

1.3. Linéarité de l'intégrale

Proposition
Soient f, g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$.

1. *$f + g$ est une fonction intégrable et $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.*
2. *Pour tout réel λ, λf est intégrable et on a $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.*
   Par ces deux premiers points nous avons la **linéarité de l'intégrale** *: pour tous réels λ, μ*

$$\boxed{\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx}$$

3. *$f \times g$ est une fonction intégrable sur $[a,b]$ mais en général $\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \big(\int_a^b f(x)\,dx\big)\big(\int_a^b g(x)\,dx\big)$.*
4. *$|f|$ est une fonction intégrable sur $[a,b]$ et*

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b \left|f(x)\right|\,dx}$$

Exemple

$$\int_0^1 \left(7x^2 - e^x\right)dx = 7\int_0^1 x^2\,dx \;-\; \int_0^1 e^x\,dx = 7\frac{1}{3} \;-\; (e-1) = \frac{10}{3} - e$$

Nous avons utilisé les calculs déjà vus : $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ et $\int_0^1 e^x\,dx = e-1$.

Exemple 4.
Soit $I_n = \int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx$. Montrons que $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

$$|I_n| = \left|\int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx\right| \leqslant \int_1^n \frac{|\sin(nx)|}{1+x^n}\,dx \leqslant \int_1^n \frac{1}{1+x^n}\,dx \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^n}\,dx$$

Il ne reste plus qu'à calculer cette dernière intégrale (en anticipant un peu sur la suite du chapitre) :

$$\int_1^n \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^n x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^n = \frac{n^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(car $n^{-n+1} \to 0$ et $\frac{1}{-n+1} \to 0$).

Remarque.
Notez que même si $f \times g$ est intégrable on a en général $\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$. Par exemple, soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = 0$ sinon. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ et $g(x) = 0$ sinon. Alors $f(x) \times g(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et donc $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 0$ alors que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$ et $\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

2. Primitive d'une fonction

2.1. Définition

Définition
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I quelconque. On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une ***primitive*** de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée.

Exemple

1. Soit $I = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f. La fonction définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ est aussi une primitive de f.
2. Soit $I = [0, +\infty[$ et $g : I \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$. Alors $G : I \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g sur I. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $G + c$ est aussi une primitive de g.

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Par dérivation on prouve facilement le résultat suivant :

Proposition

Soient F une primitive de f et G une primitive de g. Alors $F+G$ est une primitive de $f+g$. Et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λF est une primitive de λf.

Une autre formulation est de dire que pour tous réels λ, μ on a

$$\boxed{\int \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,dt = \lambda \int f(t)\,dt + \mu \int g(t)\,dt}$$

3.2. Primitives des fonctions usuelles

$\int e^x\,dx = e^x + c \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int \cos x\,dx = \sin x + c \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N}) \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\})$ sur $]0,+\infty[$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c \quad$ sur $]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$

$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c,\ \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases} \quad$ sur $]-1,1[$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} \operatorname{Argsh} x + c \\ \ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big) + c \end{cases} \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{Argch} x + c \\ \ln\big(x+\sqrt{x^2-1}\big) + c \end{cases} \quad$ sur $x \in]1,+\infty[$

Remarque.
Ces primitives sont à connaître par cœur.

1. Voici comment lire ce tableau. Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ alors la fonction : $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Les primitives de f sont les fonctions définies par $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (pour c une constante réelle quelconque). Et on écrit $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, où $c \in \mathbb{R}$.
2. Souvenez vous que la variable sous le symbole intégrale est une variable muette. On peut aussi bien écrire $\int t^n\, dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$.
3. La constante est définie pour un intervalle. Si l'on a deux intervalles, il y a deux constantes qui peuvent être différentes. Par exemple pour $\int \frac{1}{x}\, dx$ nous avons deux domaines de validité : $I_1 =]0, +\infty[$ et $I_2 =]-\infty, 0[$. Donc $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + c_1$ si $x > 0$ et $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c_2 = \ln(-x) + c_2$ si $x < 0$.
4. On peut trouver des primitives aux allures très différentes par exemple $x \mapsto \arcsin x$ et $x \mapsto \frac{\pi}{2} - \arccos x$ sont deux primitives de la même fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Mais bien sûr on sait que $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, donc les primitives diffèrent bien d'une constante !

2.3. Relation primitive-intégrale

Théorème
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\, dt}$$

est une primitive de f, c'est-à-dire F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.
Par conséquent pour une primitive F quelconque de f :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)}$$

Notation. On note $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple
Nous allons pouvoir calculer plein d'intégrales. Recalculons d'abord les intégrales déjà rencontrées.

1. Pour $f(x) = e^x$ une primitive est $F(x) = e^x$ donc
$$\int_0^1 e^x\, dx = \big[e^x\big]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$
2. Pour $g(x) = x^2$ une primitive est $G(x) = \frac{x^3}{3}$ donc
$$\int_0^1 x^2\, dx = \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}.$$
3. $\int_a^x \cos t\, dt = \big[\sin t\big]_{t=a}^{t=x} = \sin x - \sin a$ est une primitive de $\cos x$.
4. Si f est impaire alors ses primitives sont paires (le montrer). En déduire que $\int_{-a}^a f(t)\, dt = 0$.

Remarque.

1. $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est même ***l'unique primitive de f qui s'annule en a***.

2. En particulier si F est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ alors $\boxed{\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)}$.

3. On évitera la notation $\int_a^x f(x)\,dx$ où la variable x est présente à la fois aux bornes et à l'intérieur de l'intégrale. Mieux vaut utiliser la notation $\int_a^x f(t)\,dt$ ou $\int_a^x f(u)\,du$ pour éviter toute confusion.

4. Une fonction intégrable n'admet pas forcément une primitive. Considérer par exemple $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. f est intégrable sur $[0,1]$ mais elle n'admet pas de primitive sur $[0,1]$. En effet par l'absurde si F était une primitive de f, par exemple la primitive qui vérifie $F(0) = 0$. Alors $F(x) = 0$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $F(x) = x - \frac{1}{2}$ pour $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Mais alors nous obtenons une contradiction car F n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$ alors que par définition une primitive doit être dérivable.

2.4. Sommes de Riemann

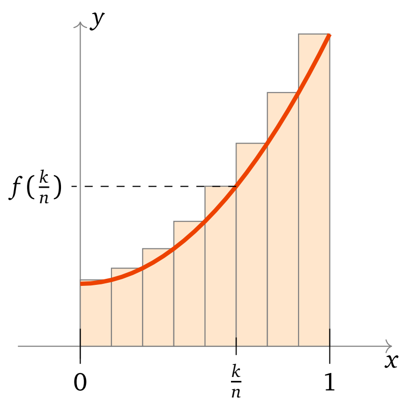
L'intégrale est définie à partir de limites de sommes. Mais maintenant que nous savons calculer des intégrales sans utiliser ces sommes on peut faire le cheminement inverse : calculer des limites de sommes à partir d'intégrales.

Théorème 5.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, alors

$$\boxed{S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx}$$

La somme S_n s'appelle la *somme de Riemann* associée à l'intégrale et correspond à une subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$ en n petits intervalles. La hauteur de chaque rectangle étant évaluée à son extrémité droite.
Le cas le plus utile est le cas où $a = 0$, $b = 1$ alors $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ et $f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$ et ainsi

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx$$



Exemple
Calculer la limite de la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.
On a $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$, $S_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \ldots$
La somme S_n s'écrit aussi $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. En posant $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 0$ et $b = 1$, on reconnaît que S_n est une somme de Riemann. Donc

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\big(\tfrac{k}{n}\big)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx = \big[\ln|1+x|\big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Ainsi $S_n \to \ln 2$ (lorsque $n \to +\infty$).

3. Intégration par parties – Changement de variable

Pour trouver une primitive d'une fonction f on peut avoir la chance de reconnaître que f est la dérivée d'une fonction bien connue. C'est malheureusement très rarement le cas, et on ne connaît pas les primitives de la plupart des fonctions. Cependant nous allons voir deux techniques qui permettent des calculer des intégrales et des primitives : l'intégration par parties et le changement de variable.

3.1. Intégration par parties

Théorème
Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$.

$$\boxed{\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx}$$

Notation. Le crochet $\big[F\big]_a^b$ est par définition $\big[F\big]_a^b = F(b) - F(a)$. Donc $\big[uv\big]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$. Si l'on omet les bornes alors $\big[F\big]$ désigne la fonction $F + c$ où c est une constante quelconque.
La formule d'intégration par parties pour les primitives est la même mais sans les bornes :

$$\int u(x)v'(x)\, dx = \big[uv\big] - \int u'(x)v(x)\, dx.$$

La preuve est très simple :

Démonstration. On a $(uv)' = u'v + uv'$. Donc $\int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b (uv)' = \big[uv\big]_a^b$. D'où $\int_a^b uv' = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u'v$.

L'utilisation de l'intégration par parties repose sur l'idée suivante : on ne sait pas calculer directement l'intégrale d'une fonction f s'écrivant comme un produit $f(x) = u(x)v'(x)$ mais si l'on sait calculer l'intégrale de $g(x) = u'(x)v(x)$ (que l'on espère plus simple) alors par la formule d'intégration par parties on aura l'intégrale de f.

Exemple

1. Calcul de $\int_0^1 xe^x\,dx$. On pose $u(x)=x$ et $v'(x)=e^x$. Nous aurons besoin de savoir que $u'(x)=1$ et qu'une primitive de v' est simplement $v(x)=e^x$. La formule d'intégration par parties donne :
$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x\,dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx\\ &= \big[u(x)v(x)\big]_0^1-\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx\\ &= \big[xe^x\big]_0^1 \ - \ \int_0^1 1\cdot e^x\,dx\\ &= \big(1\cdot e^1-0\cdot e^0\big)-\big[e^x\big]_0^1\\ &= e-(e^1-e^0)\\ &= 1\end{aligned}$$

2. Calcul de $\int_1^e x\ln x\,dx$.
On pose cette fois $u=\ln x$ et $v'=x$. Ainsi $u'=\frac{1}{x}$ et $v=\frac{x^2}{2}$. Alors
$$\int_1^e \ln x\cdot x\,dx=\int_1^e uv'=\big[uv\big]_1^e-\int_1^e u'v=\big[\ln x\cdot\tfrac{x^2}{2}\big]_1^e-\int_1^e \tfrac{1}{x}\tfrac{x^2}{2}\,dx$$
$$=\big(\ln e\tfrac{e^2}{2}-\ln 1\tfrac{1^2}{2}\big)-\tfrac{1}{2}\int_1^e x\,dx=\tfrac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\big[\tfrac{x^2}{2}\big]_1^e=\tfrac{e^2}{2}-\tfrac{e^2}{4}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{e^2+1}{4}$$

3. Calcul de $\int \arcsin x\,dx$.
Pour déterminer une primitive de $\arcsin x$, nous faisons artificiellement apparaître un produit en écrivant $\arcsin x = 1\cdot\arcsin x$ pour appliquer la formule d'intégration par parties. On pose $u=\arcsin x$, $v'=1$ (et donc $u'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v=x$) alors
$$\begin{aligned}\int 1\cdot\arcsin x\,dx &= \big[x\arcsin x\big]-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= \big[x\arcsin x\big]-\big[-\sqrt{1-x^2}\big]\\ &= x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c\end{aligned}$$

4. Calcul de $\int x^2e^x\,dx$. On pose $u=x^2$ et $v'=e^x$ pour obtenir :
$$\int x^2e^x\,dx=\big[x^2e^x\big]-2\int xe^x\,dx$$
On refait une deuxième intégration par parties pour calculer
$$\int xe^x\,dx=\big[xe^x\big]-\int e^x\,dx=(x-1)e^x+c$$
D'où
$$\int x^2e^x\,dx=(x^2-2x+2)e^x+c.$$

Exemple

Nous allons étudier les intégrales définies par $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{\sin(\pi x)}{x+n}\,dx$, pour tout entier $n>0$.

1. Montrer que $0\leqslant I_{n+1}\leqslant I_n$.
Pour $0\leqslant x\leqslant 1$, on a $0<x+n\leqslant x+n+1$ et $\sin(\pi x)\geqslant 0$, donc $0\leqslant\frac{\sin(\pi x)}{x+n+1}\leqslant\frac{\sin(\pi x)}{x+n}$. D'où $0\leqslant I_{n+1}\leqslant I_n$ par la positivité de l'intégrale.

2. Montrer que $I_n \leqslant \ln \frac{n+1}{n}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
   De $0 \leqslant \sin(\pi x) \leqslant 1$, on a $\frac{\sin(\pi x)}{x+n} \leqslant \frac{1}{x+n}$. D'où $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x+n}\,dx = \big[\ln(x+n)\big]_0^1 = \ln \frac{n+1}{n} \to 0$.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.
   Nous allons faire une intégration par parties avec $u = \frac{1}{x+n}$ et $v' = \sin(\pi x)$ (et donc $u' = -\frac{1}{(x+n)^2}$ et $v = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)$) :

$$\begin{aligned} nI_n &= n\int_0^1 \frac{1}{x+n}\sin(\pi x)\,dx \\ &= -\frac{n}{\pi}\left[\frac{1}{x+n}\cos(\pi x)\right]_0^1 - \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\cos(\pi x)\,dx \\ &= \frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n \end{aligned}$$

   Il nous reste à évaluer $J_n = \int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{(x+n)^2}\,dx$.

$$\left|\frac{n}{\pi}J_n\right| \leqslant \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{|\cos(\pi x)|}{(x+n)^2}\,dx \leqslant \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\,dx$$
$$= \frac{n}{\pi}\left[-\frac{1}{x+n}\right]_0^1 = \frac{n}{\pi}\left(-\frac{1}{1+n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1} \to 0.$$

   Donc $\lim_{n\to+\infty} nI_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n = \frac{2}{\pi}$.

3.2. Changement de variable

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une bijection de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $a, b \in J$

$$\boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt}$$

Si F est une primitive de f alors $F\circ\varphi$ est une primitive de $\big(f\circ\varphi\big)\cdot\varphi'$.

Voici un moyen simple de s'en souvenir. En effet si l'on note $x = \varphi(t)$ alors par dérivation on obtient $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ donc $dx = \varphi'(t)\,dt$. D'où la substitution $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

Démonstration. Comme F est une primitive de f alors $F'(x) = f(x)$ et par la formule de la dérivation de la composition $F\circ\varphi$ on a

$$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Donc $F\circ\varphi$ est une primitive de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Pour les intégrales : $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \big[F\circ\varphi\big]_a^b = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big) = \big[F\big]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$ □

Remarque.

Comme φ est une bijection de J sur $\varphi(J)$, sa réciproque φ^{-1} existe et est dérivable sauf quand φ s'annule. Si φ ne s'annule pas, on peut écrire $t = \varphi^{-1}(x)$ et faire un changement de variable en sens inverse.

Exemple

Calculons la primitive $F = \int \tan t\,dt$.

$$F = \int \tan t\,dt = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt\,.$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln|u|$. Donc $F = \int -\frac{u'}{u} = -\big[\ln|u|\big] = -\ln|u| + c = -\ln|\cos t| + c$.

Nous allons reformuler tout cela en terme de changement de variable. Notons $\varphi(t) = \cos t$ alors $\varphi'(t) = -\sin t$, donc

$$F = \int -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\, dt$$

Si f désigne la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, qui est bijective tant que $x \neq 0$; alors $F = -\int \varphi'(t) f(\varphi(t))\, dt$. En posant $x = \varphi(t)$ et donc $dx = \varphi'(t)dt$, on reconnaît la formule du changement de variable, par conséquent

$$F \circ \varphi^{-1} = -\int f(x)\, dx = -\int \frac{1}{x}\, dx = -\ln|x| + c\ .$$

Comme $x = \varphi(t) = \cos t$, on retrouve bien $F(t) = -\ln|\cos t| + c$.
Remarque : pour que l'intégrale soit bien définie il faut que $\tan t$ soit définie, donc $t \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$. La restriction d'une primitive à un intervalle $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ est donc de la forme $-\ln|\cos t| + c$. Mais la constante c peut être différente sur un intervalle différent.

Exemple
Calcul de $\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx$.
Soit le changement de variable $u = \varphi(x) = 1 - x^2$. Alors $du = \varphi'(x)\, dx = -2x\, dx$. Pour $x = 0$ on a $u = \varphi(0) = 1$ et pour $x = \frac{1}{2}$ on a $u = \varphi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Comme $\varphi'(x) = -2x$, φ est une bijection de $[0, \frac{1}{2}]$ sur $[1, \frac{3}{4}]$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{x\, dx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_1^{3/4} \frac{\frac{-du}{2}}{u^{3/2}} = -\frac{1}{2}\int_1^{3/4} u^{-3/2}\, du \\ &= -\frac{1}{2}\big[-2u^{-1/2}\big]_1^{3/4} = \big[\frac{1}{\sqrt{u}}\big]_1^{3/4} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.\end{aligned}$$

Exemple.
Calcul de $\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx$.
On effectue le changement de variable $x = \varphi(t) = \sin t$ et $dx = \cos t\, dt$. De plus $t = \arcsin x$ donc pour $x = 0$ on a $t = \arcsin(0) = 0$ et pour $x = \frac{1}{2}$ on a $t = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$. Comme φ est une bijection de $[0, \frac{\pi}{6}]$ sur $[0, \frac{1}{2}]$,

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t\, dt}{(1-\sin^2 t)^{3/2}} = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t\, dt}{(\cos^2 t)^{3/2}} \\ &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t}{\cos^3 t}\, dt = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2 t}\, dt = \big[\tan t\big]_0^{\pi/6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ .\end{aligned}$$

Exemple
Calcul de $\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx$.
Soit le changement de variable $x = \tan t$ donc $t = \arctan x$ et $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ (la fonction tangente établit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$). Donc

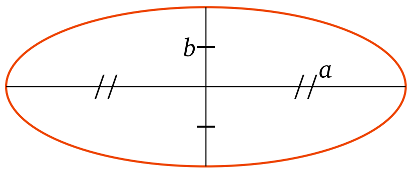
$$\begin{aligned}F &= \int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx = \int \frac{1}{(1+\tan^2 t)^{3/2}}\, \frac{dt}{\cos^2 t} \\ &= \int (\cos^2 t)^{3/2}\, \frac{dt}{\cos^2 t} \qquad \text{car } 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \\ &= \int \cos t\, dt = \big[\sin t\big] = \sin t + c = \sin(\arctan x) + c\end{aligned}$$

Donc
$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \sin(\arctan x) + c.$$
En manipulant un peu les fonctions on trouverait que la primitive s'écrit aussi $F(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$.

4. Intégration des fractions rationnelles

Nous savons intégrer beaucoup de fonctions simples. Par exemple toutes les fonctions polynomiales : si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ alors $\int f(x)\,dx = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$.

Il faut être conscient cependant que beaucoup de fonctions ne s'intègrent pas à l'aide de fonctions simples. Par exemple si $f(t) = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$ alors l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$ ne peut pas s'exprimer comme somme, produit, inverse ou composition de fonctions que vous connaissez. En fait cette intégrale vaut la longueur d'une ellipse d'équation paramétrique $(a\cos t, b\sin t)$; il n'y a donc pas de formule pour le périmètre d'une ellipse (sauf si $a = b$ auquel cas l'ellipse est un cercle !).



Mais de façon remarquable, il y a toute une famille de fonctions que l'on saura intégrer : les fractions rationnelles.

4.1. Trois situations de base

On souhaite d'abord intégrer les fractions rationnelles $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$ avec $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.
Premier cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède deux racines réelles distinctes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
Alors $f(x)$ s'écrit aussi $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_1)(x-x_2)}$ et il existe des nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$.
On a donc
$$\int f(x)\,dx = A\ln|x - x_1| + B\ln|x - x_2| + c$$
sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$, $]x_2, +\infty[$ (si $x_1 < x_2$).

Deuxième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$.

Alors $f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_0)^2}$ et il existe des nombres $A,B\in\mathbb{R}$ tels que $f(x)=\frac{A}{(x-x_0)^2}+\frac{B}{x-x_0}$. On a alors

$$\int f(x)\,dx=-\frac{A}{x-x_0}+B\ln|x-x_0|+c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty,x_0[$, $]x_0,+\infty[$.

Troisième cas. Le dénominateur ax^2+bx+c ne possède pas de racine réelle. Voyons comment faire sur un exemple.

Exemple

Soit $f(x)=\frac{x+1}{2x^2+x+1}$. Dans un premier temps on fait apparaître une fraction du type $\frac{u'}{u}$ (que l'on sait intégrer en $\ln|u|$).

$$f(x)=\frac{(4x+1)\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}{2x^2+x+1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4x+1}{2x^2+x+1}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2x^2+x+1}$$

On peut intégrer la fraction $\frac{4x+1}{2x^2+x+1}$:

$$\int\frac{4x+1}{2x^2+x+1}\,dx=\int\frac{u'(x)}{u(x)}\,dx=\ln\left|2x^2+x+1\right|+c$$

Occupons nous de l'autre partie $\frac{1}{2x^2+x+1}$, nous allons l'écrire sous la forme $\frac{1}{u^2+1}$ (dont une primitive est $\arctan u$).

$$\begin{aligned}\frac{1}{2x^2+x+1} &= \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{8}+1}=\frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}}\\ &= \frac{8}{7}\cdot\frac{1}{\frac{8}{7}2(x+\frac{1}{4})^2+1}=\frac{8}{7}\cdot\frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2+1}\end{aligned}$$

On pose le changement de variable $u=\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})$ (et donc $du=\frac{4}{\sqrt{7}}dx$) pour trouver

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{2x^2+x+1} &= \int\frac{8}{7}\frac{dx}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2+1}=\frac{8}{7}\int\frac{du}{u^2+1}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\\ &= \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan u+c=\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)+c\,.\end{aligned}$$

Finalement :

$$\int f(x)\,dx=\frac{1}{4}\ln\left(2x^2+x+1\right)+\frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)+c$$

4.2. Intégration des éléments simples

Soit $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle, où $P(x),Q(x)$ sont des polynômes à coefficients réels. Alors la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ s'écrit comme somme d'un polynôme $E(x)\in\mathbb{R}[x]$ (la partie entière) et d'éléments simples d'une des formes suivantes :

$$\frac{\gamma}{(x-x_0)^k}\qquad\text{ou}\qquad\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}\ \text{avec } b^2-4ac<0$$

où $\alpha,\beta,\gamma,a,b,c\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

1. On sait intégrer le polynôme $E(x)$.
2. Intégration de l'élément simple $\frac{\gamma}{(x-x_0)^k}$.
   (a) Si $k=1$ alors $\int\frac{\gamma\,dx}{x-x_0}=\gamma\ln|x-x_0|+c_0$ (sur $]-\infty,x_0[$ ou $]x_0,+\infty[$).
   (b) Si $k\geqslant 2$ alors $\int\frac{\gamma\,dx}{(x-x_0)^k}=\gamma\int(x-x_0)^{-k}\,dx=\frac{\gamma}{-k+1}(x-x_0)^{-k+1}+c_0$ (sur $]-\infty,x_0[$ ou $]x_0,+\infty[$).

3. Intégration de l'élément simple $\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}$. On écrit cette fraction sous la forme

$$\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k} = \gamma\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} + \delta\frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}$$

(a) Si $k=1$, calcul de $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + c_0 = \ln|ax^2+bx+c| + c_0$.

(b) Si $k \geqslant 2$, calcul de $\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)^k}\,dx = \frac{1}{-k+1}u(x)^{-k+1} + c_0 = \frac{1}{-k+1}(ax^2+bx+c)^{-k+1} + c_0$.

(c) Si $k=1$, calcul de $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$. Par un changement de variable $u = px+q$ on se ramène à calculer une primitive du type $\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + c_0$.

(d) Si $k \geqslant 2$, calcul de $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx$. On effectue le changement de variable $u = px+q$ pour se ramener au calcul de $I_k = \int \frac{du}{(u^2+1)^k}$. Une intégration par parties permet de passer de I_k à I_{k-1}.

Par exemple calculons I_2. Partant de $I_1 = \int \frac{du}{u^2+1}$ on pose $f = \frac{1}{u^2+1}$ et $g' = 1$. La formule d'intégration par parties $\int f g' = [f g] - \int f' g$ donne (avec $f' = -\frac{2u}{(u^2+1)^2}$ et $g = u$)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{du}{u^2+1} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + \int \frac{2u^2\,du}{(u^2+1)^2} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2\int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^2}du \\ &= \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2\int \frac{du}{u^2+1} - 2\int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2I_1 - 2I_2 \end{aligned}$$

On en déduit $I_2 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + c_0$. Mais comme $I_1 = \arctan u$ alors

$$I_2 = \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{1}{2}\arctan u + \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + c_0.$$

4.3. Intégration des fonctions trigonométriques

On peut aussi calculer les primitives de la forme $\int P(\cos x, \sin x)\,dx$ ou de la forme $\int \frac{P(\cos x,\sin x)}{Q(\cos x,\sin x)}\,dx$ quand P et Q sont des polynômes, en se ramenant à intégrer une fraction rationnelle.

Il existe deux méthodes :

- les règles de Bioche sont assez efficaces mais ne fonctionnent pas toujours ;
- le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ fonctionne tout le temps mais conduit à davantage de calculs.

Les règles de Bioche. On note $\omega(x) = f(x)\,dx$. On a alors $\omega(-x) = f(-x)\,d(-x) = -f(-x)\,dx$ et $\omega(\pi - x) = f(\pi - x)\,d(\pi - x) = -f(\pi - x)\,dx$.

- Si $\omega(-x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \cos x$.
- Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \sin x$.
- Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \tan x$.

Exemple

Calcul de la primitive $\int \frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x}$

On note $\omega(x) = \frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x}$. Comme $\omega(\pi - x) = \frac{\cos(\pi-x)\,d(\pi-x)}{2-\cos^2(\pi-x)} = \frac{(-\cos x)\,(-dx)}{2-\cos^2 x} = \omega(x)$ alors le changement de variable qui convient est $u = \sin x$ pour lequel $du = \cos x\,dx$. Ainsi :

$$\int \frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{2-(1-\sin^2 x)} = \int \frac{du}{1+u^2} = \big[\arctan u\big] = \arctan(\sin x) + c\,.$$

Le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$.

Les formules de la « tangente de l'arc moitié » permettent d'exprimer sinus, cosinus et tangente en fonction de $\tan\frac{x}{2}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Avec} \quad t = \tan\dfrac{x}{2} \quad \text{on a} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2} \\ \text{et} \quad dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}. \end{array}}$$

Exemple

Calcul de l'intégrale $\int_{-\pi/2}^{0} \frac{dx}{1-\sin x}$.

Le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ définit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ vers $[-1, 0]$ (pour $x = -\frac{\pi}{2}$, $t = -1$ et pour $x = 0$, $t = 0$). De plus on a $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{1-\sin x} &= \int_{-1}^{0} \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{1+t^2-2t} \\ &= 2\int_{1}^{0} \frac{dt}{(1-t)^2} = 2\left[\frac{1}{1-t}\right]_{-1}^{0} = 2\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$