

TD — Dérivabilité & Extremums : Solutions détaillées

Exercice 1

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ pour que

$f(x) = \sqrt{x}$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = ax^2 + bx + 1$ si $x > 1$
soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

① Condition de continuité en $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + b + 1$$

On impose continuité :

$$a + b + 1 = 1 \implies a + b = 0 \quad (1)$$

② Condition de dérivabilité

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x < 1 \\ 2ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = \frac{1}{2}, \quad f'(1^+) = 2a + b$$

Dérivabilité $\Rightarrow$

$$2a + b = \frac{1}{2} \quad (2)$$

③ Résolution du système

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$$

Réponse : $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$

Exercice 2 — Étude de la dérivabilité en 0

$$1) f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}, f_1(0) = 0$$

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x} = \frac{x^2 \cos(1/x)}{x} = x \cos(1/x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos(1/x) = 0$$

Donc f_1 dérivable en 0, et

$$f_1'(0) = 0$$

$$2) f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}, f_2(0) = 0$$

$$\frac{f_2(x)}{x} = \frac{\sin x}{x} \sin \frac{1}{x} \rightarrow 1 \cdot \sin \frac{1}{x}$$

Or $\sin \frac{1}{x}$ oscille : la limite n'existe pas

Donc f_2 non dérivable en 0.

$$3) f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}, f_3(1) = 1$$

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$$

$$f_3(x) = \frac{|x||x-1|}{x-1}$$

- si $x > 1$, $|x-1| = x-1 \Rightarrow f_3(x) = x$
- si $x < 1$, $|x-1| = 1-x \Rightarrow f_3(x) = -x$

Donc

$$f_3(x) = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

$$f'_3(1^-) = -1, \quad f'_3(1^+) = 1$$

$\Rightarrow$ pas égaux $\rightarrow$ non dérivable en 1

Exercice 3 — Extremums selon λ

$$f_\lambda(x) = x^3 + \lambda x$$

$$f'_\lambda(x) = 3x^2 + \lambda$$

Cas ① : $\lambda > 0$

$$3x^2 + \lambda > 0$$

Toujours positive $\Rightarrow$ pas d'extremum

Cas ② : $\lambda = 0$

$$f(x) = x^3$$

Toujours croissante $\Rightarrow$ pas d'extremum

Cas ③ : $\lambda < 0$

$$3x^2 + \lambda = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\lambda/3}$$

$$f''(x) = 6x$$

- $x < 0 \Rightarrow f'' < 0 \Rightarrow \text{maximum}$
- $x > 0 \Rightarrow f'' > 0 \Rightarrow \text{minimum}$

Conclusion

λ	Extremum
$\lambda > 0$	aucun
$\lambda = 0$	aucun
$\lambda < 0$	max en $-\sqrt{-\lambda/3}$, min en $+\sqrt{-\lambda/3}$

Exercice 4 — Fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}, \quad x \geq 0, \quad n \geq 2$$

① Dérivée

Quotient :

$$f'(x) = \frac{n(x^{n-1} - 1)}{(1 + x)^{n+1}}$$

② Signe & minimum

$$x^{n-1} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

- Avant 1 < 0
- Après 1 > 0

Donc minimum en $x = 1$

$$f(1) = \frac{1+1}{2^n} = 2^{1-n}$$

③ Dédution : inégalité

Comme $f(x) \geq f(1) = 2^{1-n}$

$$\frac{1+x^n}{(1+x)^n} \geq 2^{1-n}$$

Donc

$$(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n)$$

Inégalité démontrée

Exercice 5

$$f(x) = x^4 - x^3 + 1$$

$$f'(x) = x^2(4x - 3)$$

Points critiques : $x = 0$ et $x = \frac{3}{4}$

$$f''(x) = 12x^2 - 6x$$

$$f''(3/4) = \frac{36}{16} - \frac{18}{4} > 0$$

$\Rightarrow$ minimum en $x = \frac{3}{4}$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{229}{256}$$