TD N° 04:

Dérivabilité

Exercice 1

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad \text{si } x > 1$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}, \ \text{si } x \neq 0 \qquad ; \qquad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}, \ \text{si } x \neq 0 \qquad ; \qquad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}, \ \text{si } x \neq 1 \qquad ; \qquad f_3(1) = 1.$$

Exercice 3

Étudions les extremums de la fonction f_λ définie par $f_\lambda(x) = x^3 + \lambda x$ en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$

Exercice 4

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante:

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}, \ \ x \geqslant 0.$$

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
   (b) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.
2. (a) En déduire l'inégalité suivante:

$$(1 + x)^n \leqslant 2^{n-1}(1 + x^n), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Exercice 5

Déterminer les extremums de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.