## Exercice 1

1. $f(x) = x^3$.
   On peut utiliser la définition :
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} = 3x_0^2.$$
   Donc $f$ est dérivable en tout $x_0$ et $f'(x_0) = 3x_0^2$.
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 > 0$.
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h}.$$
   Utiliser la multiplication par le conjugué ou la règle usuelle : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc en $x_0 > 0$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
3. **$\sqrt{x}$ en $x_0 = 0$.**
   $\sqrt{x}$ est continue en $0$ mais pas dérivable en $0$ car
$$\frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow[h\to 0^+]{} +\infty,$$
   la limite n'est pas finie donc pas de dérivée.
4. **Tangente à $y = x^3 - x^2 - x$ en $x_0 = 2$.**
   $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.
   $f(2) = 8 - 4 - 2 = 2, \quad f'(2) = 12 - 4 - 1 = 7$.
   Équation de la tangente $T_0$: $y - 2 = 7(x-2)$ soit $y = 7x - 12$.

   Cherchons $x_1$ tel que la tangente en $x_1$ soit parallèle à $T_0$. Il faut $f'(x_1) = 7$ :
$$3x_1^2 - 2x_1 - 1 = 7 \quad\Longrightarrow\quad 3x_1^2 - 2x_1 - 8 = 0.$$

Discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 4 + 96 = 100$.

$$x_1 = \frac{2 \pm 10}{6} \Rightarrow x_1 = 2 \text{ (déjà connu) ou } x_1 = -\tfrac{4}{3}.$$

Pour $x_1 = -\frac{4}{3}$, $f(-\frac{4}{3}) = -\frac{64}{27} - \frac{16}{9} + \frac{4}{3} = -\frac{76}{27}$.
Tangente en $x_1$: $y + \frac{76}{27} = 7\left(x + \frac{4}{3}\right)$.

5. **Si $f$ est paire et dérivable alors $f'$ est impaire.**
$f$ paire $\Rightarrow f(-x) = f(x)$. Différencions les deux membres par rapport à $x$ (pour $x$ où dérivée existe) :

$$-f'(-x) = f'(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(-x) = -f'(x),$$

donc $f'$ est impaire.

# Exercice 2

## 1) Dérivées

- $f_1(x) = x \ln x$ (pour $x > 0$).

$$f_1'(x) = \ln x + 1.$$

- $f_2(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (pour $x \neq 0$).

$$f_2'(x) = \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{x^2}\right) = -\frac{\cos(1/x)}{x^2}.$$

- $f_3(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}$. Posons $u = \sqrt{1 + x^2}$. Alors

$$f_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

- $f_4(x) = \left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right)^{1/3}$.
$\dfrac{d}{dx} \ln \dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{2}{1-x^2}$. Donc

$$f_4'(x) = \frac{1}{3}\left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right)^{-2/3} \cdot \frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{3(1-x^2)\left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right)^{2/3}}.$$

- $f_5(x) = x^x$ (pour $x > 0$). En écrivant $x^x = e^{x \ln x}$ :

$$f_5'(x) = x^x(\ln x + 1).$$

- $f_6(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ (pour $x \neq 0$).
$\left(\arctan x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. Pour $\arctan(1/x)$ :

$$\frac{d}{dx}\arctan(1/x) = \frac{1}{1+(1/x)^2}\cdot(-1/x^2) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Donc $f_6'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$ (sur chaque composante $x > 0$ ou $x < 0$).
On en déduit que $\arctan x + \arctan(1/x)$ est constante sur $(0, +\infty)$ (valeur $\pi/2$ ) et sur $(-\infty, 0)$ (valeur $-\pi/2$).

### 2) $\Delta(f) = \frac{f'}{f}$. Calcul de $\Delta(f \times g)$ :

$$\Delta(fg) = \frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'g + fg'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} = \Delta(f) + \Delta(g).$$

### 3) $f(x) = x\ln x - x$ définie sur $]1, +\infty[$.

- $f'(x) = \ln x$. Pour $x > 1$, $\ln x > 0$ donc $f$ est strictement croissante $\Rightarrow$ injective.
- $\lim_{x\to1^+} f(x) = 1\cdot 0 - 1 = -1$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Donc image $]-1, +\infty[$ : $f$ est bijection sur cet intervalle.
  Soit $g = f^{-1}$. Pour $g(0)$, résoudre $f(x) = 0 : x(\ln x - 1) = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$. Donc $g(0) = e$.

  Dérivée de l'inverse : $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$. Ainsi

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(e)} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1.$$

### 4) Dérivées successives de $f(x) = \ln(1+x)$ (pour $x > -1$) :

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{2!}{(1+x)^3}$, etc.
Formule générale (pour $n \geq 1$):

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

(Se montre par récurrence.)

### 5) Dérivées successives de $f(x) = \ln x \cdot x^3$ (pour $x > 0$). Calcul des premières dérivées et motif :

- $f'(x) = \frac{1}{x}\cdot x^3 + \ln x \cdot 3x^2 = x^2 + 3x^2\ln x = x^2(1 + 3\ln x)$.
- $f''(x) = \frac{d}{dx}[x^2 + 3x^2\ln x] = 2x + 6x\ln x + 3x = x(5 + 6\ln x)$.
- $f^{(3)}(x) = \frac{d}{dx}\left[x(5 + 6\ln x)\right] = 5 + 6\ln x + 6 = 11 + 6\ln x$.
- $f^{(4)}(x) = \frac{6}{x}$.

- $f^{(5)}(x) = -\frac{6}{x^2}$, etc.

(On voit qu'on obtient une combinaison polynomiale en $\ln x$ et puissances de $x$ — on peut généraliser par récurrence si besoin.)

## Exercice 3

1. **Dessins (description)** — quelques exemples de fonctions ayant les propriétés demandées :

- $f_1$ admet deux minima locaux et un maximum local : par exemple un polynôme de degré 6 avec la forme en « W » (deux vallées et un pic entre elles).
- $f_2$ admet un minimum local qui n'est pas global et un maximum local qui est global : imaginer une fonction qui monte très haut à gauche (global maximum), puis descend, a un minimum local, remonte un peu (maximum local situé plus bas que le maximum global).
- $f_3$ admet une infinité d'extrémums locaux : par exemple $f_3(x) = \sin x$ (infinité de maxima et minima).
- $f_4$ n'admet aucun extremum local : par exemple $f_4(x) = e^x$ (strictement croissante).

2. **Extremum de $f(x) = ax^2 + bx + c$.**
   $f'(x) = 2ax + b$. L'extremum (unique) est en $x^* = -\dfrac{b}{2a}$. Si $a > 0$ c'est un minimum, si $a < 0$ c'est un maximum.
3. **Fonction $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable avec $f(0) = f(1) = f(2) = 0$.**
   Appliquer Rolle sur $[0, 1]$ donne $c_1 \in (0, 1)$ tel que $f'(c_1) = 0$. Appliquer Rolle sur $[1, 2]$ donne $c_2 \in (1, 2)$ tel que $f'(c_2) = 0$.
   Ensuite appliquer Rolle à la fonction $f'$ sur $[c_1, c_2]$ (car $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$) : il existe $c_3 \in (c_1, c_2) \subset (0, 2)$ tel que $f''(c_3) = 0$.
4. **Nécessité des hypothèses du théorème de Rolle** : exemples contre-exemples
   - Continuité sur $[a, b]$ : si pas continue, conclusion peut échouer. Ex : $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ avec $f(0) = f(1)$ mais aucune dérivée nulle à l'intérieur car discontinuité.
   - Dérivabilité sur $(a, b)$ : si pas dérivable, conclusion peut échouer. Ex : $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$ : $f(-1) = f(1) = 1$ mais $f'$ n'existe pas en $0$ (et il n'existe pas nécessairement un $c$ avec $f'(c) = 0$ si on n'a pas dérivabilité). (Remarque : ici il existe $c = 0$ au sens de pente nulle à gauche/droite, mais montre la nécessité formelle.)

- $f(a) = f(b)$ : si cette condition manque, la conclusion n'a pas de sens (contrex.: $f(x) = x$ sur $[0, 1]$, pas d'endpoints égaux et $f'$ n'est pas nécessairement nul).

## Exercice 4

1. **Étude de $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2$.**

   Dérivée : $f'(x) = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$. Zéros en $x = -2$ et $x = 1$.
   Seconde dérivée : $f''(x) = 2x + 1$.

   - En $x = -2$: $f''(-2) = 2(-2) + 1 = -3 < 0$ ⇒ **maximum local** en $x = -2$.
   - En $x = 1$: $f''(1) = 3 > 0$ ⇒ **minimum local** en $x = 1$.

   Valeurs :

   $$f(-2) = -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 + 2 = -\frac{8}{3} + 2 + 4 + 2 = -\frac{8}{3} + 8 = \frac{16}{3}.$$
   $$f(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

   Donc maximum local $f(-2) = 16/3$, minimum local $f(1) = 5/6$. (On trace le graphe en tenant compte des signes de $f'$ et limites pour le comportement global.)

2. **$f(x) = \sqrt{x}$ sur $[100, 101]$ et le théorème des accroissements finis (T.A.F.).**
   Par le T.A.F. il existe $c \in (100, 101)$ tel que

   $$f'(c) = \frac{f(101) - f(100)}{101 - 100} = \sqrt{101} - 10.$$

   Mais $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc $\sqrt{101} - 10 = \frac{1}{2\sqrt{c}}$ avec $c \in (100, 101)$. Comme $c \in (100, 101)$ on a

   $$\frac{1}{2\sqrt{101}} \leq \frac{1}{2\sqrt{c}} \leq \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20}.$$

   De plus $\frac{1}{2\sqrt{101}} \geq \frac{1}{22}$ car $2\sqrt{101} \leq 22$ (puisque $\sqrt{101} \leq 11$). D'où

   $$\frac{1}{22} \leq \sqrt{101} - 10 \leq \frac{1}{20},$$

   soit

$$10 + \frac{1}{22} \leq \sqrt{101} \leq 10 + \frac{1}{20}.$$

3. **Montrer $\ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.**

   Appliquer le T.A.F. sur l'intervalle $[x, x+1]$ à la fonction $\ln t$. Il existe $\xi \in (x, x+1)$ tel que

   $$\ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi}.$$

   Comme $\xi > x$ on a $\frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$. D'où l'inégalité.

4. $f(x) = e^x$. Appliquer le T.A.F. sur $[0, x]$ (on suppose $x \neq 0$). Il existe $c \in (0, x)$ tel que

   $$e^x - e^0 = e^c(x - 0) \quad \Longrightarrow \quad e^x - 1 = xe^c.$$

   En particulier, si $x > 0$ alors $e^c > 1$ donc $e^x - 1 > x$. Si $x < 0$ on obtient $e^x - 1 < x$.

5. **Règle de l'Hôpital — limites quand $x \to 0$**

   a) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{(1+x)^n - 1}$. Forme $0/0$. Par L'Hôpital :

   $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{n(1+x)^{n-1}} = \frac{1}{n}.$$

   b) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$. Forme $0/0$. Par L'Hôpital :

   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{1/(1+x)}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x \to 0^+} 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{1+x} = 0.$$

   c) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x}$. Développement limité : $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\tan x \sim x$, donc limite $0$. (Ou L'Hôpital : dérivée numérateur $\sin x$, dérivée dénominateur $\sec^2 x$ → $\sin x \cos^2 x \to 0$.)

   d) $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$. Développement : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Donc numérateur $\sim \frac{x^3}{6}$ et la limite vaut $\frac{1}{6}$.