Données

$$\vec{r}_1 = (2,\ 3,\ -1), \qquad \vec{r}_2 = (3,\ 2,\ -2), \qquad \vec{r}_3 = (4,\ -3,\ 3).$$

1) Modules

Calculs détaillés :

$$\|\vec{r}_1\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}.$$

$$\|\vec{r}_2\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17}.$$

$$\|\vec{r}_3\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9 + 9} = \sqrt{34}.$$

2) $\vec{A} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$ et $\vec{B} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3$

Sommes composante par composante :

$$\vec{A} = (2 + 3 + 4,\ 3 + 2 - 3,\ -1 - 2 + 3) = (9,\ 2,\ 0).$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{9^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{81 + 4} = \sqrt{85}.$$

$$\vec{B} = (2 + 3 - 4,\ 3 + 2 + 3,\ -1 - 2 - 3) = (1,\ 8,\ -6).$$

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{1^2 + 8^2 + (-6)^2} = \sqrt{1 + 64 + 36} = \sqrt{101}.$$

3) Vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par $\vec{C} = \vec{r}_1 + 2\vec{r}_2$

$$\vec{C} = \vec{r}_1 + 2\vec{r}_2 = (2 + 2 \cdot 3,\ 3 + 2 \cdot 2,\ -1 + 2 \cdot (-2)) = (8,\ 7,\ -5).$$

Module :

$$\|\vec{C}\| = \sqrt{8^2 + 7^2 + (-5)^2} = \sqrt{64 + 49 + 25} = \sqrt{138}.$$

Vecteur unitaire :

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|} = \frac{1}{\sqrt{138}}(8,\ 7,\ -5).}$$

4) Produit scalaire et produit vectoriel $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$

Produit scalaire :

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) = 6 + 6 + 2 = 14.$$

Produit vectoriel (déterminant) :

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4,\ 1,\ -5).$$

(En détail : $i(3 \cdot (-2) - (-1) \cdot 2) - j(2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3) + k(2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) = (-4, 1, -5)$.)

5) Calculs $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ et $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

D'abord $\vec{B} \times \vec{C}$:

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 8 & -6 \\ 8 & 7 & -5 \end{vmatrix} = (\,2,\ -43,\ -57\,).$$

Produit scalaire mixte :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (9, 2, 0) \cdot (2, -43, -57) = 9 \cdot 2 + 2 \cdot (-43) + 0 \cdot (-57) = 18 - 86$$

Donc $\boxed{\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = -68.}$

Pour $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ on utilise l'identité triple :

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}).$$

Calculons les produits scalaires nécessaires :

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = (9,2,0)\cdot(8,7,-5) = 9\cdot 8 + 2\cdot 7 + 0 = 72 + 14 = 86.$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (9,2,0)\cdot(1,8,-6) = 9\cdot 1 + 2\cdot 8 + 0 = 9 + 16 = 25.$$

Donc

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = 86\vec{B} - 25\vec{C}.$$

Remplaçant $\vec{B} = (1,8,-6),\ \vec{C} = (8,7,-5)$:

$$86\vec{B} = (86,\ 688,\ -516), \qquad 25\vec{C} = (200,\ 175,\ -125).$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (86-200,\ 688-175,\ -516-(-125)) = (-114,\ 513,\ -391).$$

6) Angle entre $\vec{r}_2$ et $\vec{r}_3$

Produit scalaire :

$$\vec{r}_2\cdot\vec{r}_3 = 3\cdot 4 + 2\cdot(-3) + (-2)\cdot 3 = 12 - 6 - 6 = 0.$$

Le produit scalaire nul implique orthogonalité. Donc l'angle est

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{rad} = 90^\circ.}$$

7) Les vecteurs $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ forment-ils une base ?

Calcul du déterminant de la matrice dont les vecteurs sont les colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\det(M) = -34 \quad (\text{dét} \neq 0).$$

Puisque le déterminant est non nul, ces trois vecteurs sont linéairement indépendants et forment donc une base de $\mathbb{R}^3$. (Le déterminant négatif indique qu'ils forment une base orientée négativement par rapport à la base canonique.)

8) Réécrire $\vec{A} = (9,2,0)$ en coordonnées cylindriques et sphériques

On prend $\vec{A} = (x,y,z) = (9,2,0)$.

Cylindriques (r, φ, z) (où $r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \operatorname{atan2}(y, x)$) :

$$r = \sqrt{9^2 + 2^2} = \sqrt{85}, \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{2}{9}\right) \approx 0.21867\,\text{rad}\ (\approx 12.53^\circ), \qquad z = ($$

Donc

$$\boxed{(r, \varphi, z) = \left(\sqrt{85},\ \arctan(2/9),\ 0\right).}$$

Sphériques (convention usuelle physique: (ρ, θ, φ) avec ρ rayon, θ angle polaire mesuré depuis l'axe z, φ azimutal) :

$$\rho = \sqrt{85}, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}\ (\text{puisque } z = 0), \qquad \varphi = \arctan(2/9).$$

Donc

$$\boxed{(\rho, \theta, \varphi) = \left(\sqrt{85},\ \frac{\pi}{2},\ \arctan\frac{2}{9}\right).}$$

(Remarque : certaines rédactions utilisent d'autres notations/ordres — je précise la convention choisie.)