

Exercice 1 : Calcul vectoriel

Soient les vecteurs suivants dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{v} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

1. Calculer les **modules** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
 2. Calculer les vecteurs suivants puis déterminer leurs modules :
 - $\vec{M} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$
 - $\vec{N} = 2\vec{u} - \vec{v}$
 3. Déterminer le **vecteur unitaire** porté par le vecteur $\vec{N}$.
 4. Calculer le **produit scalaire** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ puis en déduire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
-

Exercice 2 : Produits vectoriels et mixtes

1. Calculer le **produit vectoriel** $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
2. Calculer le **produit mixte** :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

3. Que représente géométriquement ce produit mixte ?
4. Calculer :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

Exercice 3 : Angles et bases

1. Calculer l'**angle** entre les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
 2. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment-ils une **base de $\mathbb{R}^3$** ? Justifier votre réponse.
-

Exercice 4 : Changement de coordonnées

1. Exprimer le vecteur $\vec{M}$ en **coordonnées cylindriques**.
2. Exprimer le même vecteur en **coordonnées sphériques**.

Exercice 5 : Combinaisons linéaires

On considère les vecteurs :

$$\vec{a} = (1, 2, -1), \quad \vec{b} = (2, -1, 3), \quad \vec{c} = (-1, 1, 2)$$

1. Déterminer les réels α et β tels que :

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$$

2. Le vecteur $\vec{c}$ est-il une **combinaison linéaire** de $\vec{a}$ et $\vec{b}$?
 3. Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont-ils **linéairement indépendants** ? Justifier.
-

Exercice 6 : Projection et orthogonalité

On donne :

$$\vec{p} = (2, 1, -2), \quad \vec{q} = (1, -1, 1)$$

1. Calculer le produit scalaire $\vec{p} \cdot \vec{q}$.
 2. En déduire si les vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{q}$ sont orthogonaux.
 3. Calculer la **projection orthogonale** de $\vec{p}$ sur $\vec{q}$.
 4. Déterminer le vecteur composante de $\vec{p}$ **orthogonal** à $\vec{q}$.
-

Exercice 7 : Vecteurs colinéaires et plan

On considère les vecteurs :

$$\vec{m} = (3, -6, 9), \quad \vec{n} = (1, -2, 3), \quad \vec{r} = (2, 1, 0)$$

1. Montrer que $\vec{m}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.
2. Les vecteurs $\vec{m}$, $\vec{n}$ et $\vec{r}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Déterminer une équation du **plan** passant par l'origine et engendré par $\vec{n}$ et $\vec{r}$.

Exercice 8 : Applications géométriques

On considère les points :

$$A(1, 0, 2), \quad B(2, -1, 4), \quad C(3, 1, 1)$$

1. Calculer les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
 2. Calculer l'aire du **parallélogramme** construit sur $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
 3. Les points A , B et C sont-ils **alignés** ? Justifier.
 4. Calculer le volume du **parallélépipède** défini par $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{i}$.
-

Exercice 9 : Changement de coordonnées

Soit le vecteur :

$$\vec{t} = (2, 2, 1)$$

1. Donner son module.
2. Écrire $\vec{t}$ en **coordonnées cylindriques**.
3. Écrire $\vec{t}$ en **coordonnées sphériques**.
4. Donner le **vecteur unitaire** associé à $\vec{t}$.