

On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} (1 + x^2), & x \leq 1, \\ x^3 - 3x + \alpha, & x > 1, \end{cases}$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$  est un paramètre réel.

---

Question 1 – Continuité et dérivabilité en  $x = 1$

1. Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

et déterminer la valeur de  $\alpha$  pour laquelle  $f$  est continue en 1.

2. Calculer les dérivées latérales :

$$f'_-(1), \quad f'_+(1),$$

puis déterminer s'il est possible de rendre  $f$  dérivable en  $x = 1$ .

---

Question 2 – Dérivabilité en 0 d'une fonction à racine

Étudier la dérivabilité en  $x = 0$  de la fonction :

$$g(x) = \sqrt{|x|} (1 + x^2),$$

en utilisant la définition de la dérivée :

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}.$$


---

Question 3 – Calculs de dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1.  $h_1(x) = x \ln(1 + x^2)$

2.  $h_2(x) = [\ln(\frac{1+x}{1-x})]^{1/3}$

3.  $h_3(x) = x^x$

4.  $h_4(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$  pour  $x > 0$

---

Question 4 – Étude de variations et extrémums

Soit la fonction :

$$H(x) = x^4 - 2x^3 + 1.$$

1. Calculer la dérivée  $H'(x)$ .

2. Étudier son signe.

3. Déterminer les points où  $H$  admet des extrémums (et leur nature).

4. Établir le tableau de variations complet.

---

Question 5 – Théorème de Rolle et Théorème des Accroissements Finis (T.A.F)

1. Montrer qu'il existe un point  $c \in (0, 2)$  tel que :

$$k'(c) = 0,$$

où

$$k(x) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

2. Appliquer le T.A.F à la fonction  $\sqrt{x}$  sur l'intervalle  $[25, 26]$  et en déduire l'encadrement :

$$5 + \frac{1}{11} \leq \sqrt{26} \leq 5 + \frac{1}{10}.$$

---

Question 6 – Règle de L'Hospital

Calculer les limites suivantes :

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

---

Question 7 – Parité et dérivée

Montrer que si une fonction  $u$  est paire et dérivable, alors sa dérivée  $u'$  est impaire.