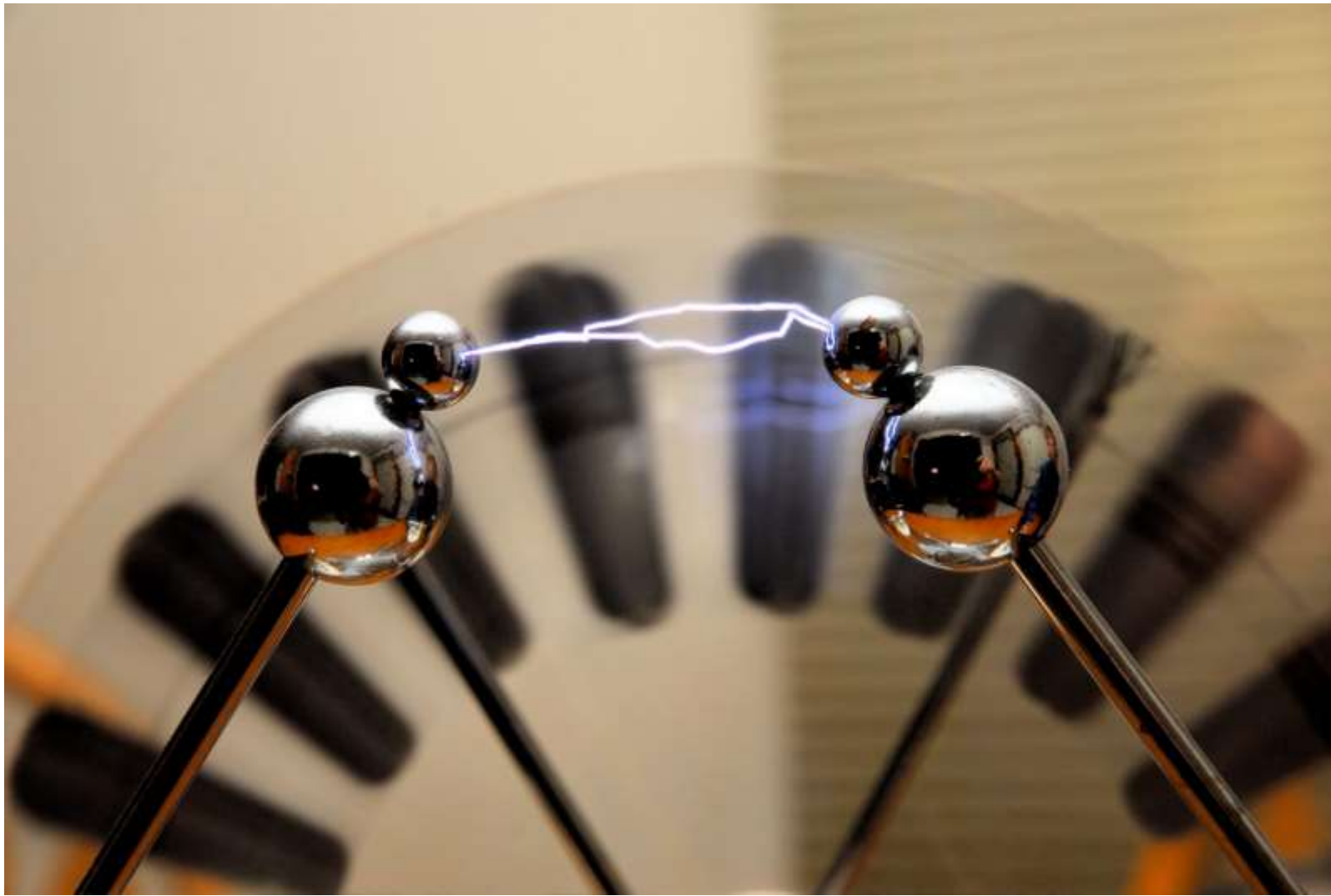




Electrostatique

1. Introduction

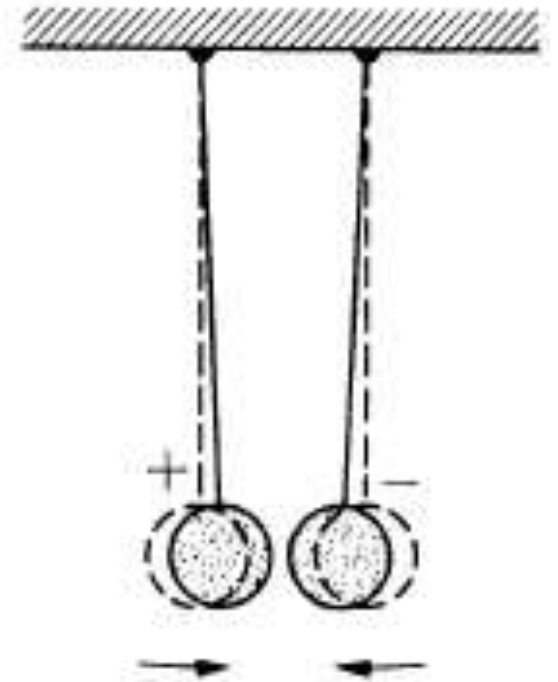
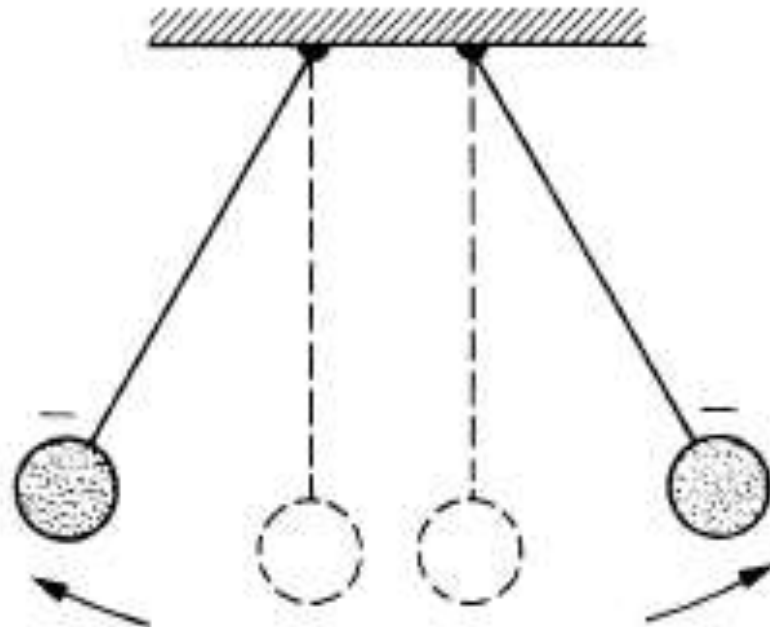
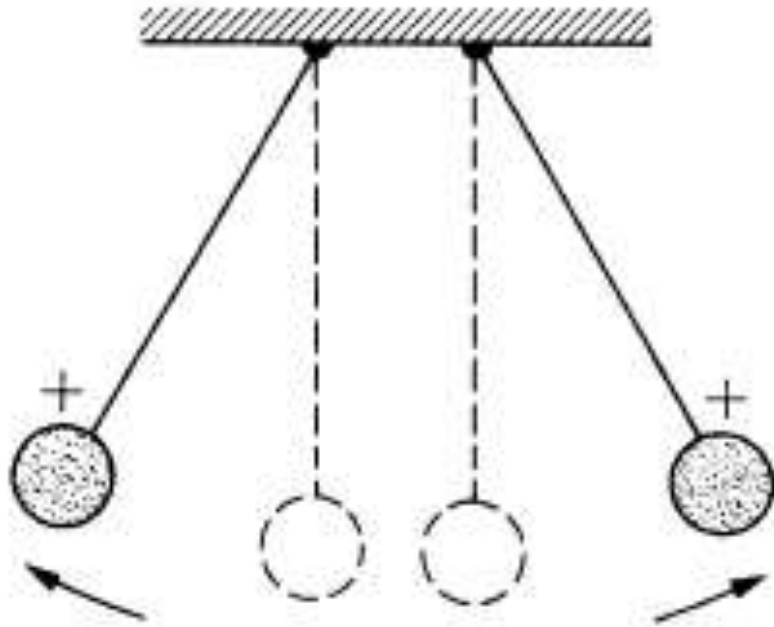
- Les phénomènes électriques ont été découverts très tôt dans l'histoire de l'humanité.
- Ils ont été d'abord objet de curiosité ou de crainte, puis d'expériences spectaculaires aux 16ème et 17ème siècles.
- Leur analyse scientifique entre 1785 et 1875 a conduit à l'élaboration d'une théorie cohérente de l'électricité dont la validité subsiste encore aujourd'hui sans modification essentielle.
- L'électricité est dite statique lorsqu'elle s'accumule sur les corps à la suite d'un frottement ou d'un autre procédé.
- L'électrostatique est la branche de la physique qui étudie les phénomènes créés par des charges électriques statiques pour l'observateur.

2. Electrification, Electric Charge

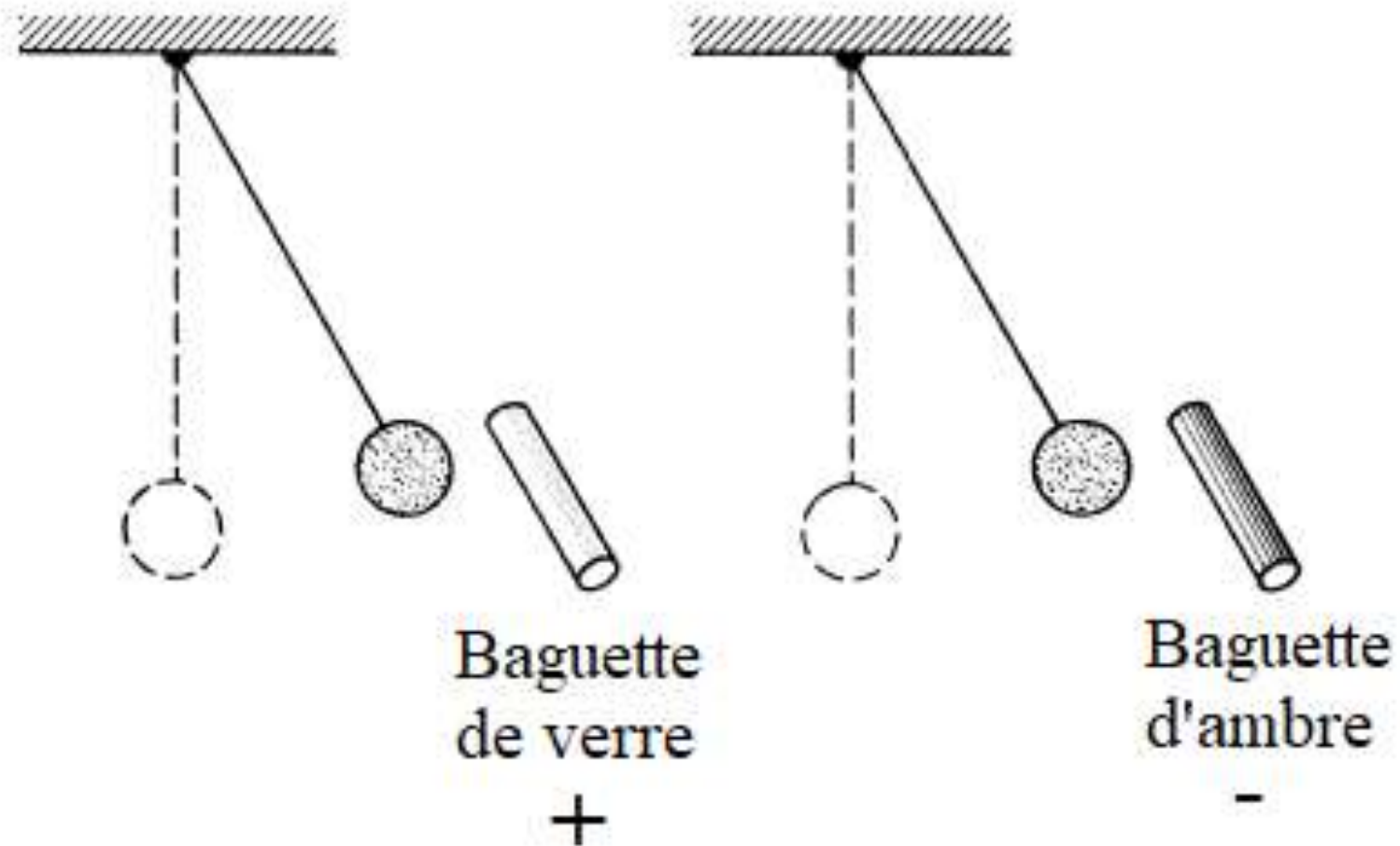
Froth with wool, a piece of amber or glass. One observes that it attracts light bodies. It is thus possible to electrify certain bodies ; this phenomenon obeys several qualitative laws:

- 1) Bodies electrified exert mechanical actions.
- 2) Electrification can be transferred from one body to another.
- 3) There are two electrifications, conventionally qualified as positive and negative.

4) Deux corps de même électrisation se repoussent, alors que deux corps d'électrisations différentes s'attirent.



5) Tout corps non électrisé est attiré par un corps électrisé, quel que soit le type d'électrisation.



2.2. Charge électrique

- La **charge** électrique est une **propriété fondamentale** de la matière responsable des interactions électrostatiques.
- On ne peut pas l'observer directement, mais ses effets sont visibles : attraction, répulsion, déviation, ...etc.
- La charge électrique possède des propriétés remarquables que nous nous proposons d'analyser :

a) Charge positive et charge negative :

- La charge électrique peut exister sous deux formes, l'une qualifiée de positive l'autre de négative.
- Notons que le choix d'une charge négative pour l'électron est purement conventionnel.

b) Extensivité de la charge :

- La charge électrique d'un système est une grandeur extensive,
- c'est-à-dire qu'elle peut se mettre sous la forme de la somme algébrique des charges élémentaires qui la constituent.
- Exemple: Un corps a $+5 \mu\text{C}$ et un autre $-2\mu\text{C}$. Quelle est la charge totale ?

$$(+5 \mu\text{C}) + (-2\mu\text{C}) = +3 \mu\text{C}$$

c) Conservation de la charge électrique

- Les charges électriques élémentaires étant **permanentes**, si un corps chargé est **isolé**, c'est-à-dire s'il ne peut pas échanger de charges avec l'extérieur, sa charge électrique reste constante.
- Ceci constitue la loi de conservation de la charge. Il s'agit là d'un postulat fondamental de l'électromagnétisme, jamais contesté expérimentalement.

Remarque: Depuis 1964, on a postulé l'existence de particules, appelées quarks, dont la charge est une fraction de e . Les quarks n'ont jamais été observés à l'état libre, mais la théorie qui les prédit explique également cette difficulté d'observation.

d) Quantification de la charge

➤ De nombreuses expériences, dont la plus célèbre fut réalisée par le physicien Américain **P. Millikan en 1910**, montrent que la charge électrique q d'un système ne peut varier que par **multiples entiers d'une charge élémentaire e** :

$$q = n \cdot e, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad e = 1,60217733 \cdot 10^{-19} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$$

➤ Les porteurs stables de la charge sont :

- le **proton**, qui porte la charge **$+e$**
- l'**électron**, qui porte la charge **$-e$**

Les deux charges élémentaires ont la même valeur absolue, seule leur direction (le signe) change.

- Il est remarquable que les deux particules qui portent ces charges opposées aient des **masses très différentes** :

$$m_p \approx 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg},$$

$$m_e \approx 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p \approx 1836 \times m_e$$

- Même si le proton et l'électron ont des masses extrêmement différentes, ils portent des charges exactement **égales** en valeur absolue.
- Cela montre que la charge électrique est une propriété fondamentale, **indépendante** de la masse des particules.

3. Densité de Charges électriques

- La charge électrique macroscopique Q d'un corps comporte un nombre important de charges élémentaires e ($Q = Ne$ avec N entier relatif très grand)
- Comme la charge élémentaire e est très petite ($e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$), la distribution réelle des charges à l'intérieur du corps apparaît **quasiment continue** à l'échelle macroscopique.
- Ainsi, au lieu de décrire la charge par un ensemble ponctuel de charges élémentaires, on modélise la répartition de Q par une **densité de charge électrique** adaptée à la géométrie du corps :

➤ **Pour un fil (1 dimension) : densité linéique**

$$\lambda = \frac{dQ}{d\ell} \text{ (C/m)}$$

➤ **Pour une surface (2 dimensions) : densité surfacique**

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \text{ (C/m}^2\text{)}$$

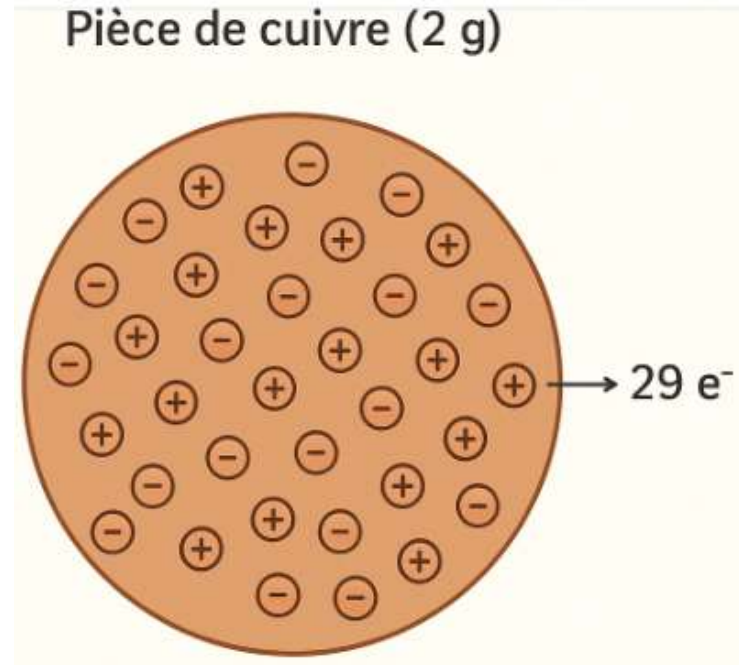
➤ **Pour un volume (3 dimensions) : densité volumique**

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \text{ (C/m}^3\text{)}$$

Ces grandeurs permettent de passer d'une charge totale à une description locale, particulièrement utile en électrostatique et pour l'application de la loi de Gauss.

Exemple 1

Déterminer la **quantité de charge** portée par l'ensemble des électrons d'une pièce de cuivre (Cu , $A = 63$ et $Z = 29$) de **masse 2 g**.



On donne:

L'unité de masse atomique : $1 u = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

- Charge élémentaire : $e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Exemple 2

Calculer la densité volumique de charge ρ d'un noyau d'uranium de charge $Q = 92 e$, on assimile que le noyau est une sphère uniformément chargée en volume, le rayon de cette sphère vaut $R = 1 fm$.

Exemple 3

On suppose que la Terre, considéré comme sphérique de rayon $R = 6400 \text{ km}$, porte une charge négative $Q = -10^6 \text{ C}$.

a) On considère que les charges sont réparties uniformément sur sa surface avec une densité de charge surfacique σ_T . Calculer σ_T .

4. Forces entre charges électriques statiques

- Deux charges électriques exercent entre elles une force. À l'échelle microscopique, les forces électriques sont omniprésentes, tous les constituants élémentaires de la matière, à l'exception des neutrons, étant électriquement chargés.
- Toutefois à l'échelle macroscopique, ces forces sont en général de moyenne nulle, les corps étant à cette échelle, dans la plupart des cas, électriquement neutres.
- Pour que l'on puisse observer des forces électriques macroscopiques, elles doivent s'exercer entre des corps ayant rompu leur neutralité de charges.

4.1. Force entre deux charges ponctuelle - Loi de Coulomb

- C'est en **1785**, c'est-à-dire presque **cent ans** exactement **après** l'énoncé de la loi de la gravitation par Newton, que **Charles Augustin de Coulomb** (1736- 1806) établit expérimentalement la loi donnant la force exercée entre deux charges électriques. D'une manière expérimentale, Coulomb a constaté que :
- la force qui s'exerce entre des charges immobiles q_1 et q_2 est inversement proportionnelle au carré de la distance r qui les sépare, autrement dit, $F \propto \frac{1}{r^2}$.
- Si la distance est constante, la force est proportionnelle au produit des charges, autrement dit, $F \propto q_1 q_2$.

En prenant en considération ces deux résultats, la loi de Coulomb représente la force électrique qu'exerce l'une sur l'autre deux charges q_1 et q_2 :

$$F = K_e \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \quad (1)$$

➤ **F** représentant le module du vecteur force électrique, on a pris la valeur absolue du produit des charges pour avoir une grandeur toujours positive.

➤ Dans le système international, où la force s'exprime en newton (N), la charge en coulomb (C) et la distance en mètre (m), le coefficient de proportionnalité vaut :

$$K_e = 8,9874 \cdot 10^9 \approx 9 \cdot 10^9 (m^3 \cdot kg \cdot A^{-2} s^{-4})$$

➤ Pour des raisons pratique et pour la facilité des calculs, il est plus commode d'exprimer K_e , sous la forme $K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

➤ ou la nouvelle constante physique ϵ_0 est appelée *permittivité du vide*. D'après la valeur donnée à K_e , elle a pour valeur $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} N^{-1} m^{-2} C^2$

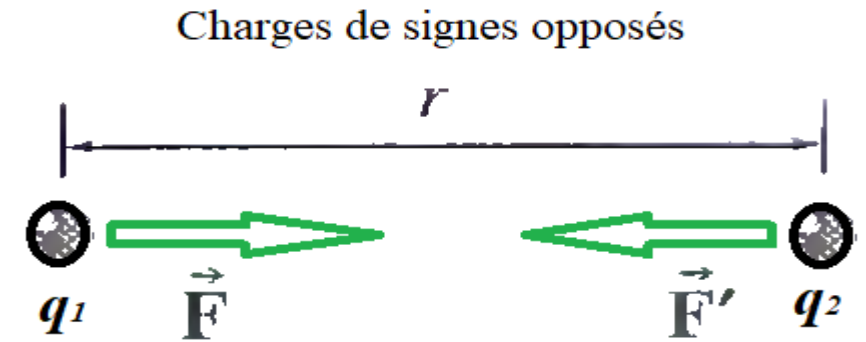
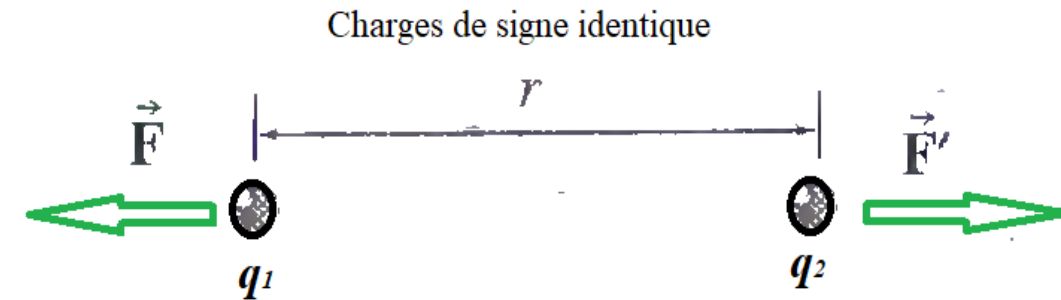
➤ en conséquence, nous écrivons la force sous la forme: $F = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

L'équation (1) donne le module du vecteur force électrique. Pour déterminer son orientation, il suffit de se rappeler que :

- des charges de signe identique se repoussent
- et des charges de signes contraires s'attirent.
- La force électrique est une force **radiale** (elle est dirigée selon la droite joignant les deux particules) et de symétrie sphérique (elle ne dépend que de **r**).

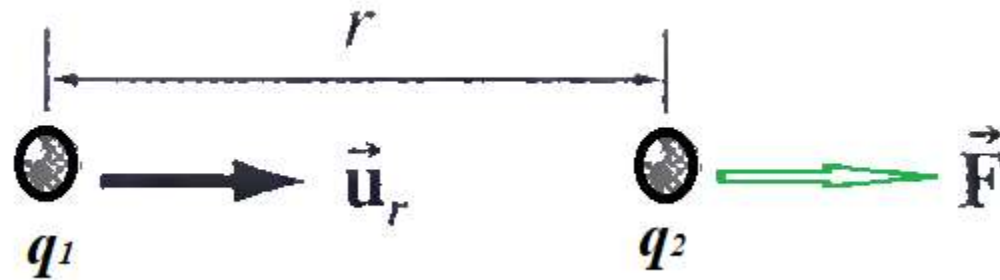
Sous sa forme vectorielle, la loi de Coulomb s'écrit :

$$\boxed{\vec{F} = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r} \quad (2) \quad \text{puisque } \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{alors} \quad \boxed{\vec{F} = K_e \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}} \quad (3)$$



Le vecteur unitaire $\vec{u}_r$, a pour origine la « source de la force ».

Par exemple, pour trouver la force agissant sur q_2 , on place l'origine du vecteur $\vec{u}_r$ en q_1 , comme le montre la figure.



Les signes des charges doivent figurer explicitement dans l'équation (2). Si la force a pour module F (grandeur scalaire positive), alors $\vec{F} = + F \vec{u}_r$, correspond à une répulsion, alors que $\vec{F} = - F \vec{u}_r$, correspond à une attraction.

Exemple 4

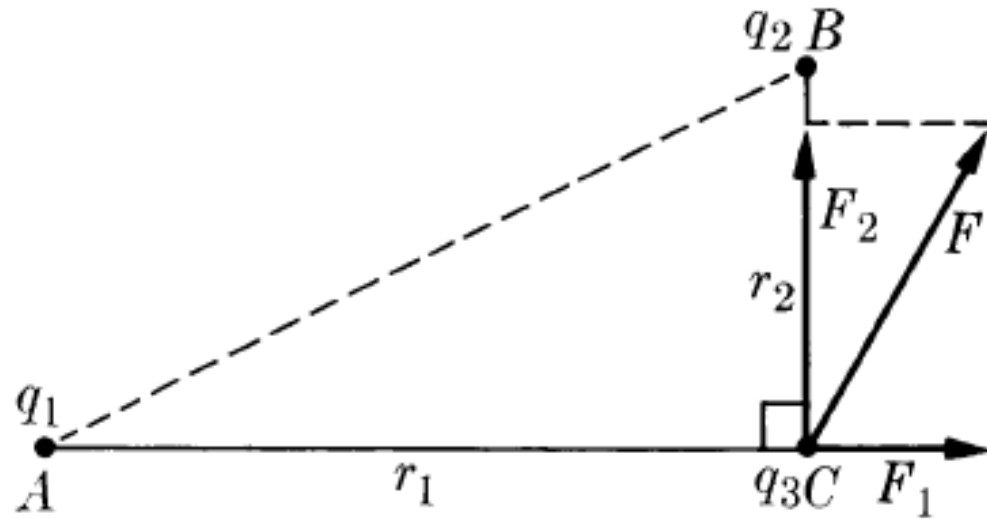
L'atome d'hydrogène consiste en un électron de masse $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, en orbite autour d'un proton de masse $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ à une distance moyenne de $0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Déterminer le rapport de la force électrique et de la force gravitationnelle agissant entre ces deux particules.

On donne: $G = (6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{ kg}^{-2})$; $K_e = 9 \cdot 10^9 (\text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{A}^{-2} \text{ s}^{-4})$

Exemple 5

Etant donné la disposition des charges de la figure suivante:



où $q_1 = +1,5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$, $q_2 = -0,5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$, $q_3 = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ C}$,
 $AC = 1,2 \text{ m}$ et $BC = 0,5 \text{ m}$.

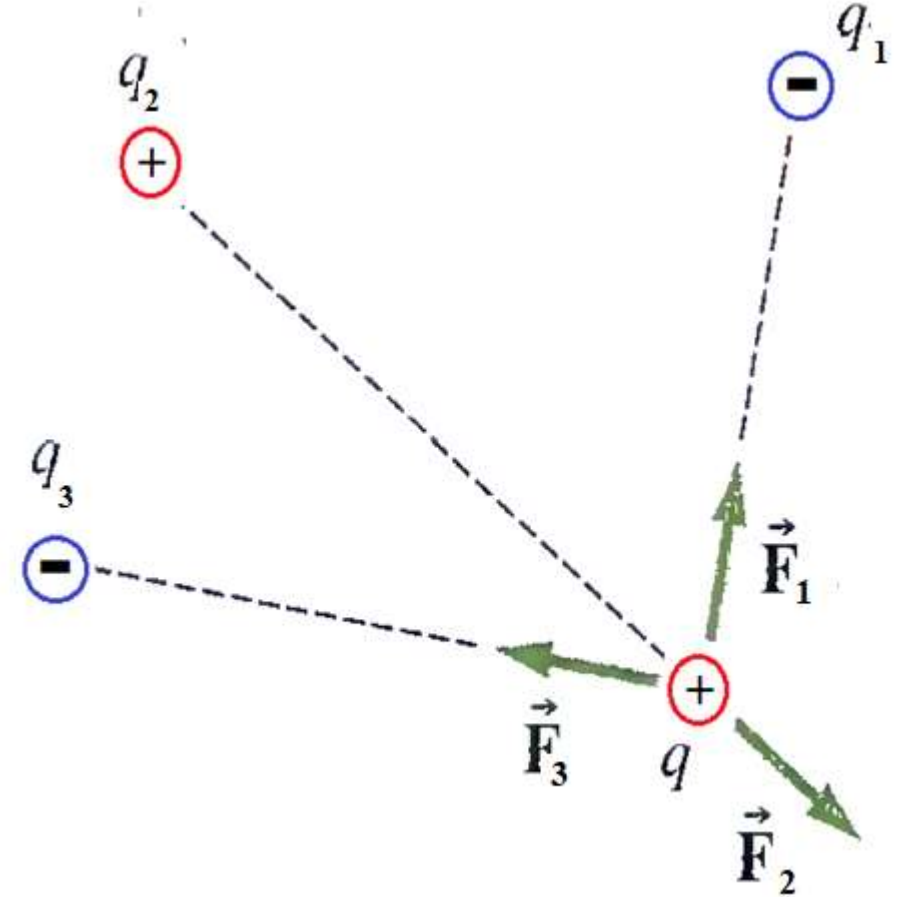
Trouver la force résultante sur la charge q_3

4.2. Principe de superposition

- La force électrique étant, comme toutes les forces, une grandeur vectorielle,
- les forces électriques exercées par différentes charges électriques : $q_1, q_2, \dots, q_n$ sur une charge q , se calculent indépendamment l'une de l'autre et s'ajoutent vectoriellement.

La force résultante $\vec{F}$ exercée sur la charge q par les autres charges, est donnée par :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N$$



$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \dots + \vec{F_N}$$

$$\vec{F} = K_e \frac{qq_1}{r_1^2} \vec{u_1} + K_e \frac{qq_2}{r_2^2} \vec{u_2} + K_e \frac{qq_3}{r_3^2} \vec{u_3} \dots + K_e \frac{q_1q_N}{r_N^2} \vec{u_N}$$

$$\vec{F} = q \sum_{i=1}^N K_e \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u_i} \quad (4)$$

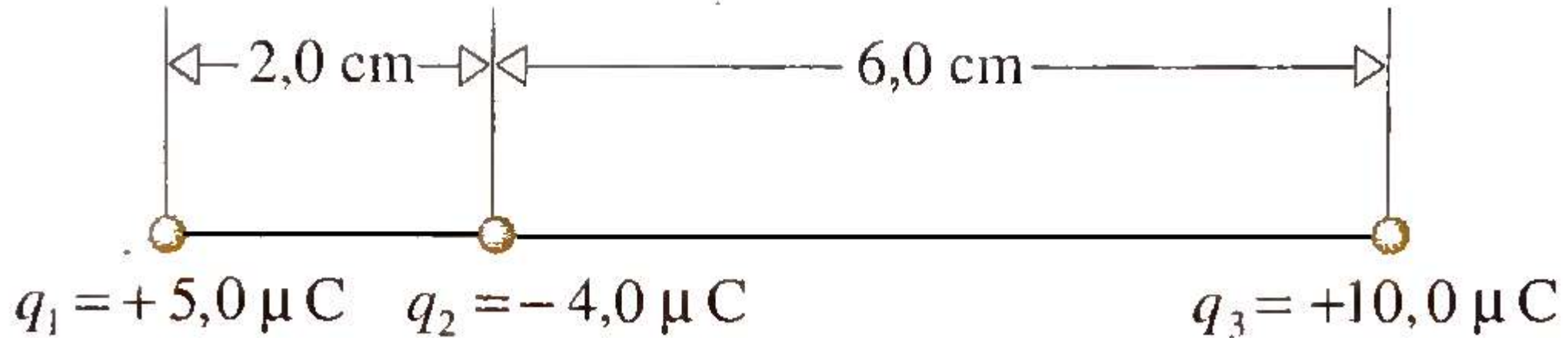
puisque $\vec{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}$ alors

$$\vec{F} = K_e \frac{qq_1}{r_1^3} \vec{r_1} + K_e \frac{qq_2}{r_2^3} \vec{r_2} + K_e \frac{qq_3}{r_3^3} \vec{r_3} \dots + K_e \frac{q_1q_N}{r_N^3} \vec{r_N}$$

$$\vec{F} = q \sum_{i=1}^N K_e \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r_i} \quad (5)$$

Exemple 6

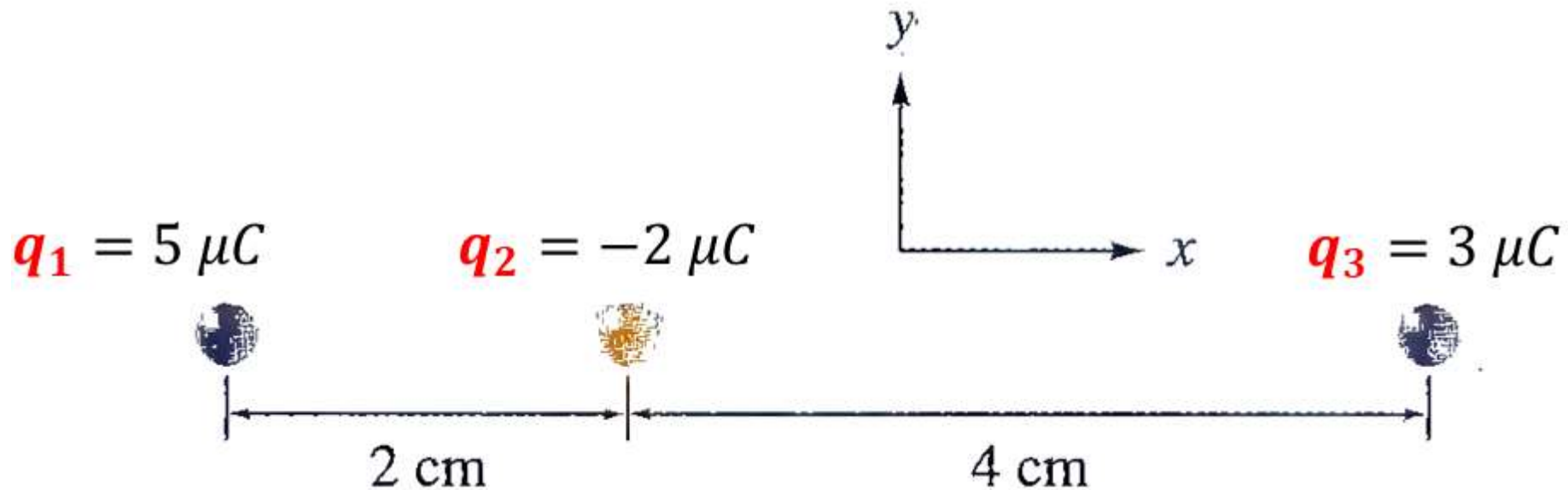
La Figure suivante montre trois petites sphères uniformément chargées.



Déterminer la force résultante sur la sphère du milieu produite par les deux autres.

Exemple 7

Trois charges ponctuelles sont situées sur une droite de la manière indiquée sur la figure suivante :



Trouvez la force électrique résultante, issue des deux autres charges, exercée sur :

- (a) la charge q_2
- (b) la charge q_1 .

5. Champ et potentiel électrostatiques Créés par une charge ponctuelle

- En électrostatique, les effets électriques générés par un corps chargé peuvent être décrits par deux grandeurs mathématiques :
 - l'une constitue un champ de vecteurs ou **champ électrique** et
 - l'autre représente un champ de scalaires ou **potentiel électrique**.
- La connaissance de ces deux grandeurs en tout point de l'espace permet de décrire toutes les perturbations électriques induites par le corps chargé dans son environnement et donc les actions subies par des charges avoisinantes.
- Soulignons aussi que ces deux grandeurs soient interdépendantes ce qui signifie que la connaissance du champ électrique en chaque point de l'espace permet de déduire le potentiel électrique et inversement.

5.1. Le champ électrostatique

- On notera que la force nette $\vec{F}$ dans l'équation (4) : $\left[\vec{F} = q \left(\sum_{i=1}^N K_e \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \right) \right]$ dépend linéairement de la valeur de la charge q .
- Cela signifie que l'ensemble des autres charges crée, en chaque point de l'espace, une configuration telle qu'une charge q placée à cet endroit subit une force.
- La somme vectorielle $\left(\sum_{i=1}^N K_e \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \right)$, indépendante de q , peut donc être considérée comme une grandeur caractéristique de l'espace au point $\vec{r}$.
- Autrement dit, à chaque point de l'espace on peut associer un vecteur déterminé uniquement par la distribution des charges q_i et de leurs positions $\vec{r}_i$.
Ce vecteur, noté $\vec{E}(\vec{r})$, est par définition le **champ électrostatique** au point $\vec{r}$.

La force exercée par la charge q sur la charge q' située à une distance r de q

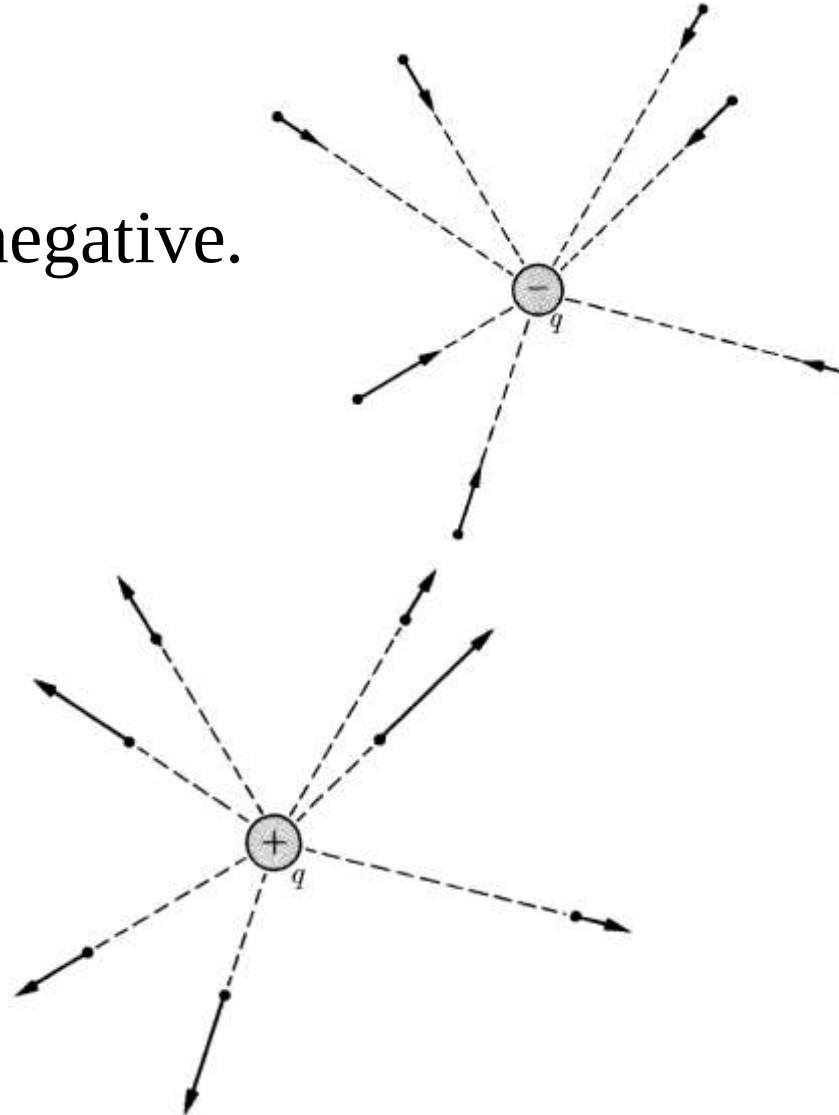
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = q' \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \vec{u}_r \\ \vec{F} = q' \vec{E}(\vec{r}) \end{array} \right. \quad (6) \Leftrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad (7)$$

Le champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ est exprimé en newtons/coulomb ou NC^{-1} , soit en unités fondamentales $m\ kg\ s^{-2}\ C^{-1}$

➤ L'expression (7) est simultanément valable pour des charges positives ou négatives, le sens de $\vec{E}(\vec{r})$ par rapport à $\vec{u}_r$, dépendant du signe de q . On a deux cas:

➤ $\vec{E}(\vec{r})$ est dirigé vers une charge négative.

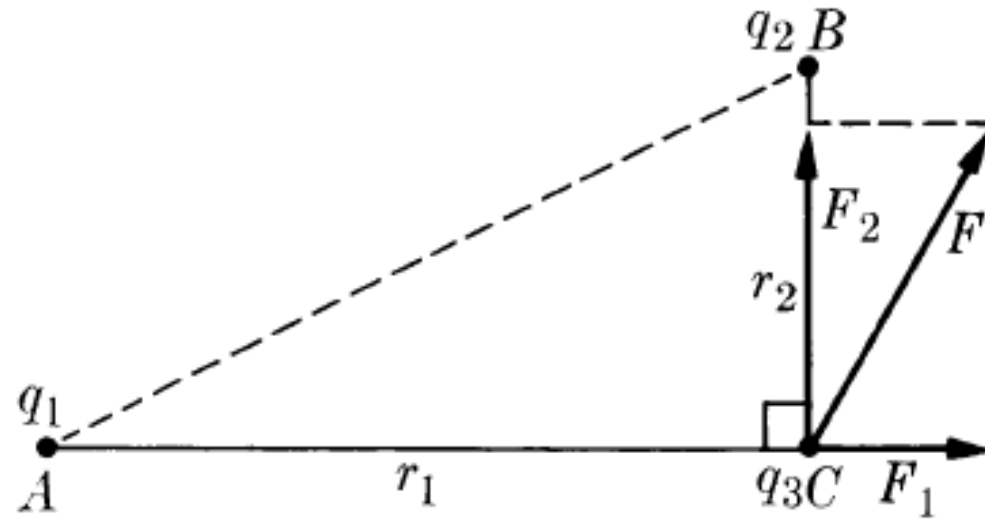
➤ $\vec{E}(\vec{r})$ part d'une charge positive.



Exemple 8

Déterminer le champ électrique créé par les charges q_1 et q_2 en C.

Les charges étant définies dans l'exemple 5.



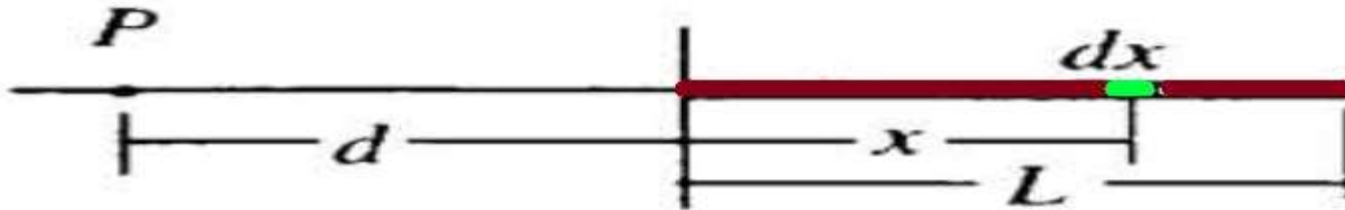
5.2. Champ électrique d'une distribution de charge continue

Une façon de trouver le champ électrique dû à une distribution de charge continue consiste à :

- Diviser la charge en morceaux infinitésimaux de charge dq
- Additionner la contribution de chacune de dq en utilisant le calcul intégral.

Exemple 9

Une charge Q est répartie uniformément le long de l'axe x sur une distance L (avec une densité de charge linéaire λ , $\lambda = \frac{Q}{L}$).



Déterminez le champ électrique sur l'axe à une distance d d'une extrémité du segment chargé.

Exemple 10

Une charge Q est répartie uniformément le long d'une tige. La tige est ensuite pliée pour former un demi-cercle de rayon R .

Quel est le champ électrique au centre du demi-cercle ?

5.2. Le potentiel électrostatique

- Une particule chargée, placée dans un champ électrique, possède une certaine énergie potentielle parce que le champ exerce sur elle une force et que du travail a dû être fourni pour amener la charge en un point donné du champ.
- Le potentiel électrique en un point est défini comme *l'énergie potentielle* par *unité de charge* placée au un point donné du champ.
- Désignant le potentiel électrique par V et l'énergie potentielle d'une charge q par E_{pe} , on a :

$$V = \frac{E_{pe}}{q} \Leftrightarrow \boxed{E_{pe} = q V} \quad (10)$$

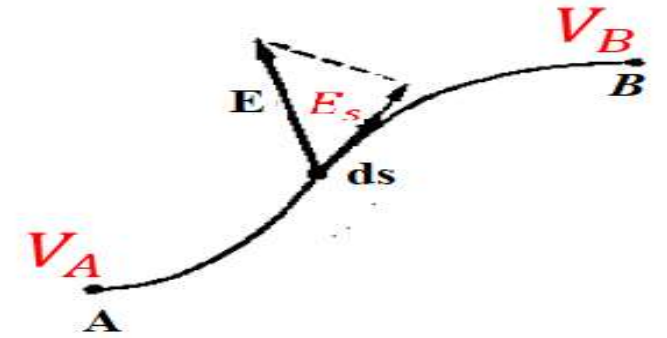
L'unité du potentiel dans le SI est le joule par coulomb (J/C). La quantité 1 J/C est appelée 1 volt (V) en hommage à Alessandro Volta : $V(\text{volt}) = \frac{E_{pe}(\text{Joule})}{q(\text{Coulomb})}$

Exemple 11

L'unité la plus courante du champ électrique est le volt par mètre (V/m).
Montrer qu'elle est compatible avec les unités introduites jusque là (N/C).

5.2.1. Relation entre le champ E et le potentiel V

Supposons qu'une charge q se déplace de A en B dans un champ électrique.



L'équation (10) fournit la variation d'énergie potentielle de la charge:

$$E_{pe,A} - E_{pe,B} = q (V_A - V_B)$$

Mais d'après la définition de l'énergie potentielle, le terme gauche donne le travail fourni à la charge lorsqu'elle se déplace de A en B .

En désignant ce travail par $W_{A \rightarrow B}$, on a

$$W_{A \rightarrow B} = q (V_A - V_B)$$

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = q (V_A - V_B)$$

$$q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = q (V_A - V_B)$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_A - V_B \quad (11)$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -(V_B - V_A) = - \int_A^B dV$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV \Leftrightarrow \vec{E} = -\frac{dV}{d\vec{r}} \quad (12)$$

Notant (E_1, E_2, E_3) les composantes du champ $\vec{E}$ dans une base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et (dl_1, dl_2, dl_3) les composantes de $d\vec{r}$ dans cette même base, la relation différentielle $\vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV$ s'explicite suivant :

$$E_1 dl_1 + E_2 dl_2 + E_3 dl_3 = -dV$$

$$E_1 dl_1 + E_2 dl_2 + E_3 dl_3 = \frac{(-\partial V)}{\partial l_1} dl_1 + \frac{(-\partial V)}{\partial l_2} dl_2 + \frac{(-\partial V)}{\partial l_3} dl_3$$

Il en résulte que:

$$E_1 = \frac{-\partial V}{\partial l_1} \quad E_2 = \frac{-\partial V}{\partial l_2} \quad E_3 = \frac{-\partial V}{\partial l_3}$$

$$\text{donc : } \vec{E} = E_1 \vec{e}_1 + E_2 \vec{e}_2 + E_3 \vec{e}_3 = - \left[\frac{\partial V}{\partial l_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial V}{\partial l_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial V}{\partial l_3} \vec{e}_3 \right]$$

Par définition, on appelle gradient d'une fonction V , le champ de vecteurs défini par:

$$\vec{\nabla} V = \text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial l_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial V}{\partial l_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial V}{\partial l_3} \vec{e}_3$$

Les relations précédentes peuvent donc être condensées sous la forme:

$$\boxed{\vec{E} = -\text{grad } V} \quad (13)$$

5.2.2. Potentiel électrique d'une charge ponctuelle

Pour obtenir le potentiel électrique d'une charge ponctuelle, on utilise l'équation (12), on peut écrire:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{d\vec{r}} \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = -\frac{dV}{d\vec{r}}$$
$$\int dV = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d\vec{r}}{r^2}$$

En intégrant et on supposant que $V = 0$ pour $r = \infty$ comme dans le cas de la gravitation, on obtient :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (14)$$

Le potentiel V est positif ou négatif suivant le signe de la charge qui le produit.

Si l'on a plusieurs charges $q_1, q_2, q_3 \dots$, le potentiel électrique en un point P est la somme scalaire de leurs potentiels individuels, c'est-à-dire

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}$$

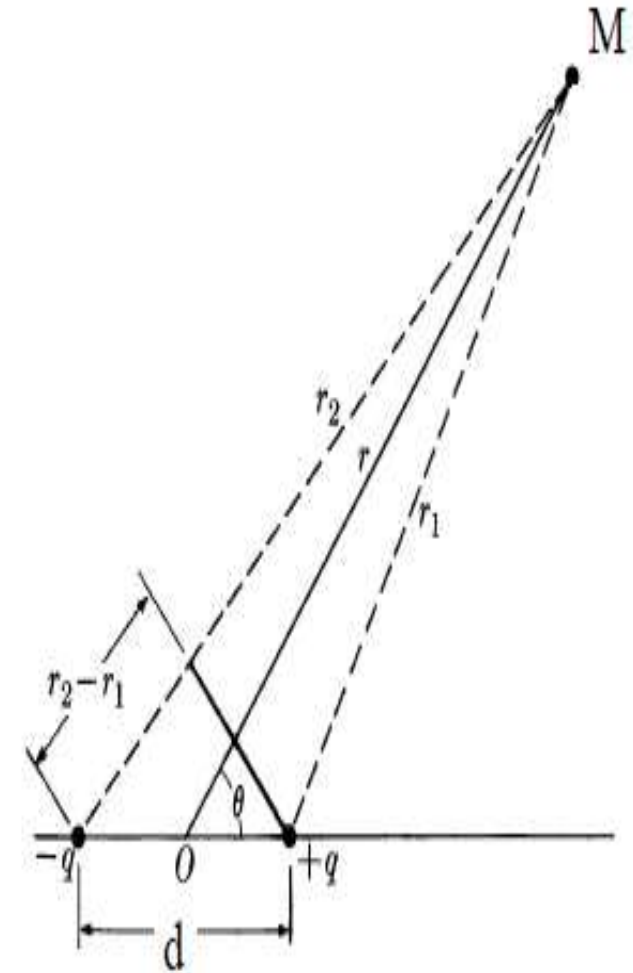
Il en résulte qu'il est en général plus facile de calculer le potentiel dû à une distribution de charge et d'en dériver le champ résultant que de procéder en sens inverse.

Exemple 12

Déterminer l'énergie potentielle électrique de la charge q_3 dans l'exemple 5.

6 – Dipôle électrostatique

- Une disposition intéressante de charges est celle constituant un dipôle électrique.
 - Il est formé de deux charges égales et opposées, $+q$ et $-q$ séparées par une très petite distance d .
 - Le moment électrique dipolaire $\vec{p}$ est défini par $\vec{p} = q\vec{d}$ où d est le déplacement de la charge négative à la charge positive.
 - Toute molécule dans laquelle les centres des charges positives et négatives ne coïncident pas peut, en première approximation, être considérée comme un dipôle.
- Certaines molécules (HCl , CO et H_2O) ont des dipôles permanents et sont appelées molécules polaires.



6 – 1 – Potentiel électrique créé par le système $(-q, +q)$

D'après le principe de superposition, le potentiel électrique, créé par cet ensemble de deux charges en un point M quelconque caractérisé par sa position $\vec{r}$, est égal à:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}$$

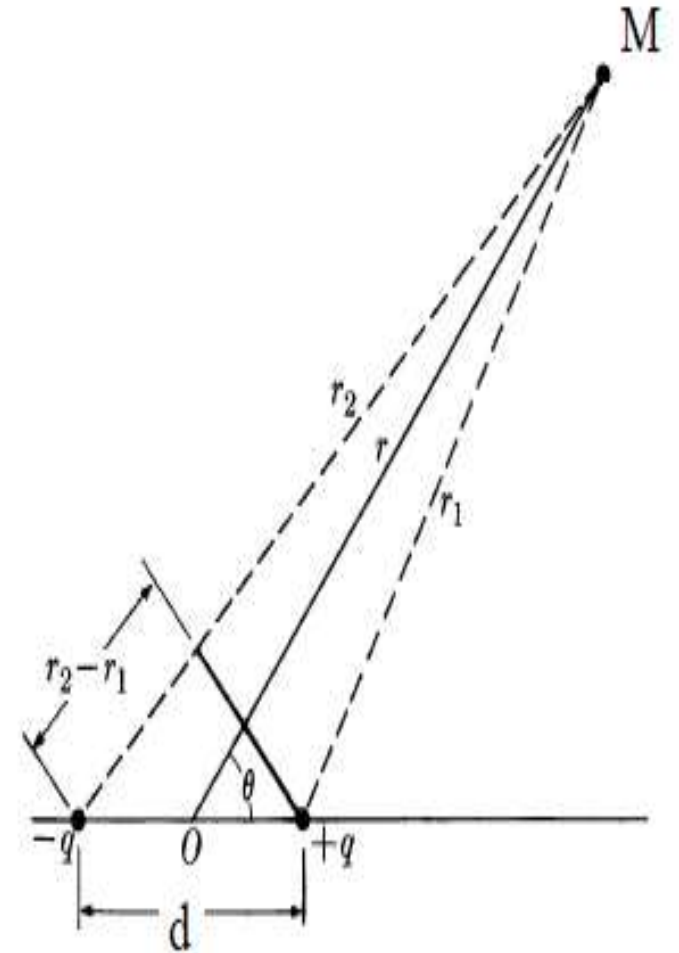
Si la distance d est très petite par rapport à r , on peut écrire:

$$r_2 - r_1 = d \cos \theta \quad \text{et} \quad r_1 r_2 = r^2$$

ce qui donne

$$V(M) \cong \frac{dq \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{ou}$$

$$V(M) = \frac{P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (15)$$



6-2- Champ électrique créé par le système $(-q, +q)$

- Le champ électrique créé par le système $(-q, +q)$ peut se calculer en appliquant la relation $[\vec{E} = -grad V]$ au potentiel donné par la relation (15).
- En coordonnées polaires, la composante radiale E_r et la composante transversale E_θ sont données par :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \qquad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{P \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Nous pouvons également calculer le module du champ électrique :

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$$

Exemple 13

Un dipôle électrique se compose de charges $+q$ et $-q$ séparées par une distance $2a$.

Si les charges sont positionnées en $(0, 0, a)$ et $(0, 0, -a)$

sur l'axe z (l'axe du dipôle),

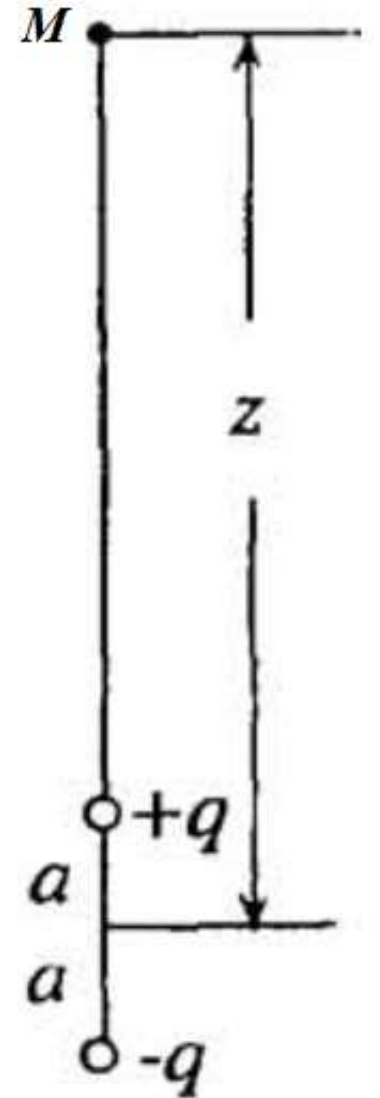
déterminer le champ électrique du dipôle en un point à une

distance z de l'origine sur l'axe z , où $z \gg 2a$.

Exprimez le résultat en termes de moment dipolaire électrique.

défini comme $P = 2a q$.

Utilise : $\frac{1}{1-\delta} \simeq 1 + \delta$ Si $\delta \ll 1$

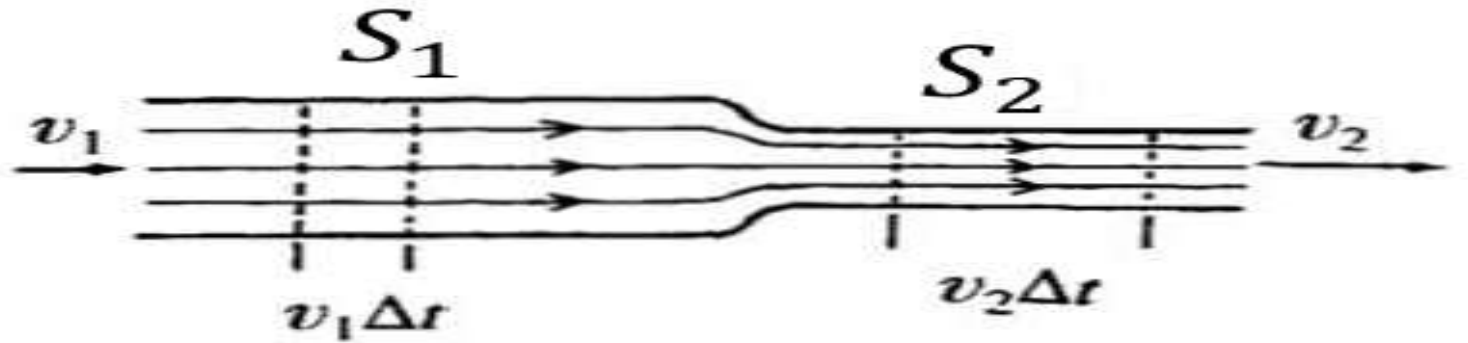


7 –Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss établit une relation entre le **flux du champ électrique** à travers une **surface fermée** et la **charge à l'intérieur de cette surface**. Cette relation, n'est rien d'autre que **la première équation de Maxwell**.

7.1. Ecoulement des fluides

- Supposons qu'un fluide s'écoule à travers un tuyau dont la section transversale diminue de S_1 à S_2 .



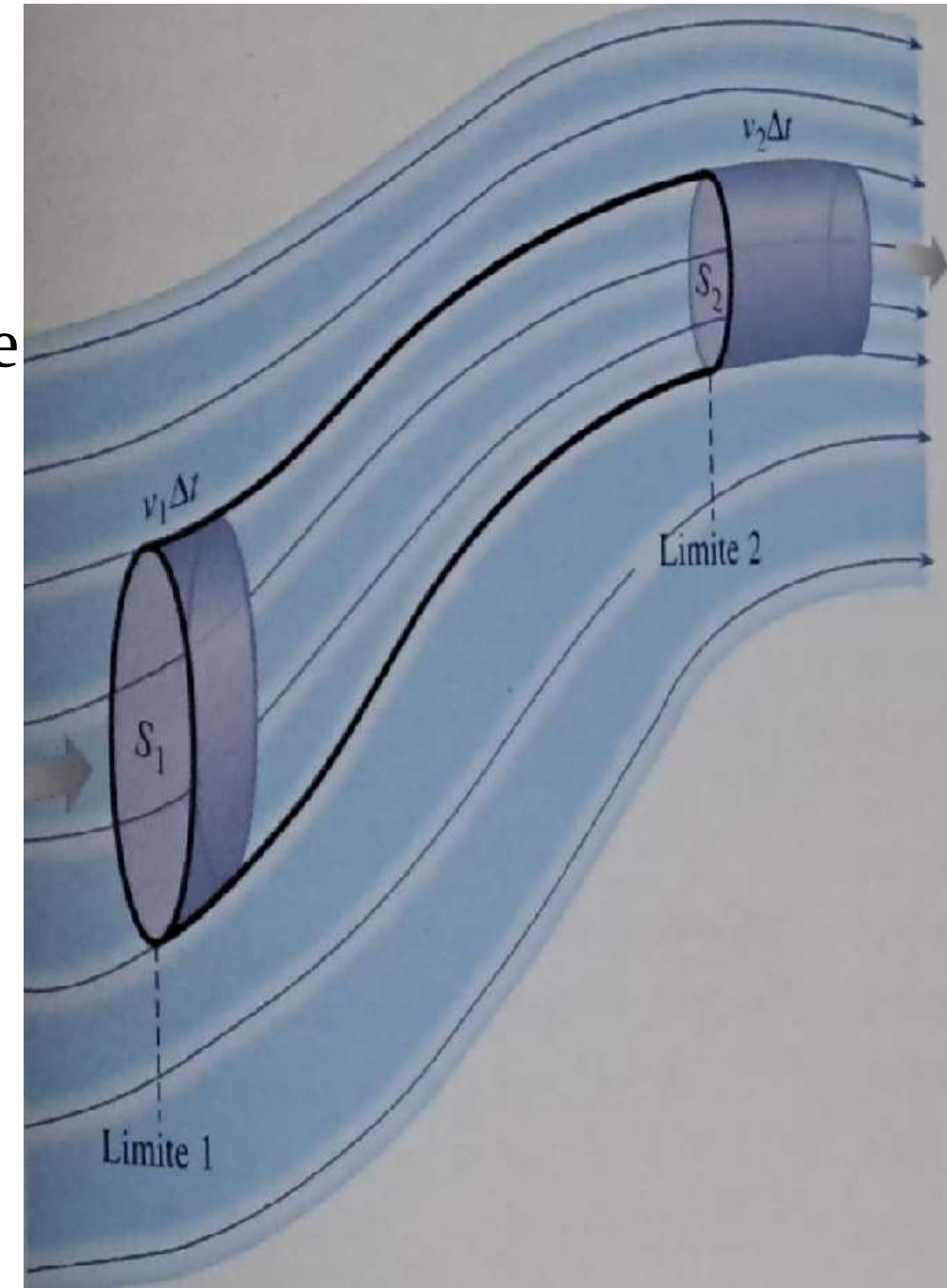
- Lorsque cela se produit, le fluide accélère en passant d'une section à l'autre.
- Si un volume de fluide dV entre dans le grand tuyau en temps dt , il doit s'écouler dans le petit tuyau en même temps, car aucun fluide ne peut s'accumuler à l'intérieur.
- Pendant l'intervalle de temps dt , le fluide se déplace d'une distance de $dx = v dt$, donc $dV = S dx = S v dt$. Ainsi $S_1 v_1 dt = S_2 v_2 dt$. Ou
$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

C'est l'équation de la continuité.

- Le produit $(S v)$ est le débit volumique et sera représenté par le symbole J

$$J = S v = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

- Le débit volumique est aussi le volume de liquide qui traverse une section quelconque du tube du courant par unité du temps. Dans le système SI, elle s'exprime en $m^3 s^{-1}$
- On peut dire aussi que :
- « Le débit est le **flux du champ de vitesse** à travers une **surface** ».



Exemple 14

L'eau s'écoule à travers un tuyau d'arrosage de diamètre intérieur 2 cm à une vitesse de 1.2 ms^{-1} .

A quelle vitesse sortira-t-il d'une buse de diamètre 0.5 cm ?

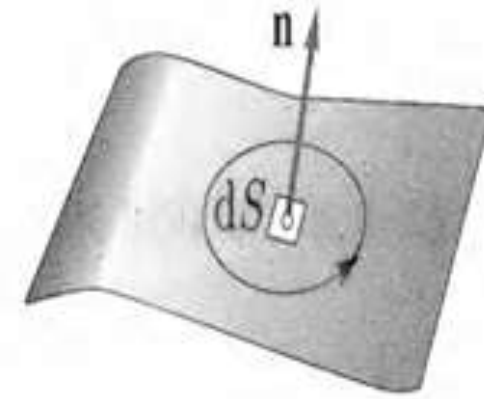
7.2. Analogie centrale (Fluide – électrostatique)

Fluide	Electrostatique
Champ de vitesse $\vec{v}$	Champ électrique $\vec{E}$
Débit	Flux électrique
Source fluide	Charge électrique
Equation de Continuité	Théorème de Gauss

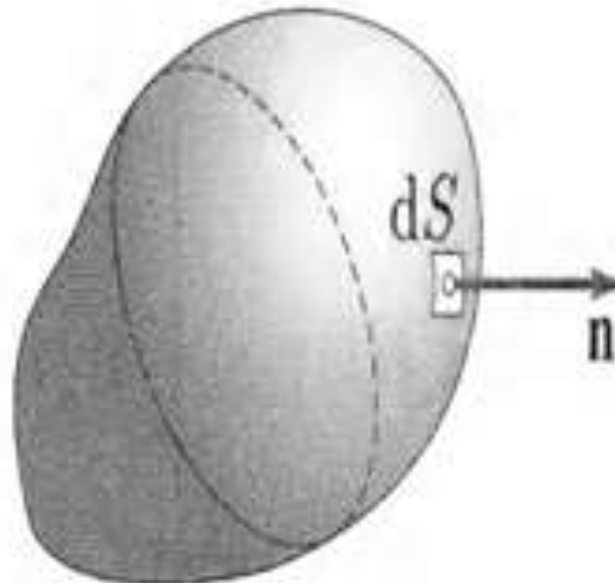
7.3. Flux du champ électrique

- Une très petite surface $d\vec{S}$ peut être représentée par un vecteur $\vec{n}$ **perpendiculaire** à cette surface et de magnitude égale à celle-ci:

$$d\vec{S} = dS \vec{n}$$



- Si dS fait partie d'une surface fermée, on choisit une direction de dS dirigée vers l'extérieur.



- Les **lignes de champ électrique** ressemblent à des lignes d'écoulement dans un fluide (même si rien ne s'écoule). Le mot flux signifie, en gros, « **écoulement** ».
- Sur la base de cette comparaison, nous définissons le flux du champ électrique à travers une surface **dS** comme:

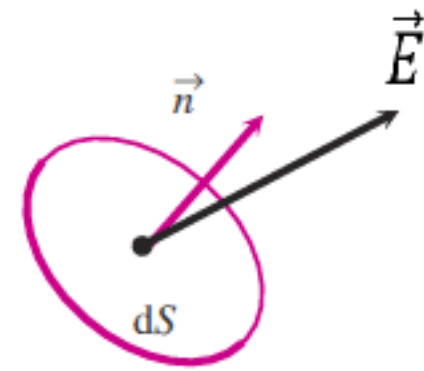
$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot dS \vec{n}$$

$$d\Phi = E dS \cos \theta \quad (16)$$

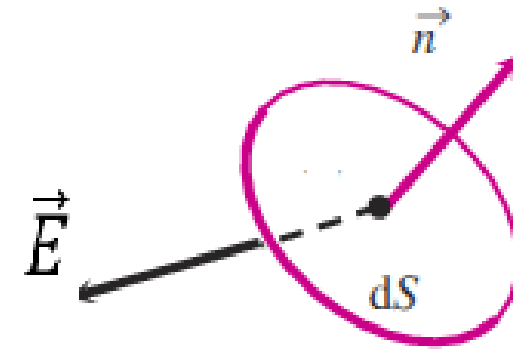
Ici **θ** est l'angle que fait le vecteur champ **$\vec{E}$** avec la normale à la surface **$\vec{n}$** .

Le flux de **E** à travers **dS** est simplement égal au nombre de lignes de champ **E** traversant **dS** . On constate que le flux est une valeur algébrique avec :

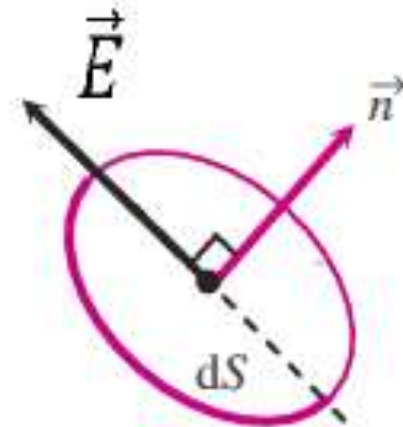
➤ $d\Phi > 0$ Si $\vec{E}$ et $\vec{n}$ sont dirigés vers le même côté
($\cos \theta > 0$ lorsque $0^\circ < \theta < 90^\circ$).



➤ $d\Phi < 0$ Si $\vec{E}$ et $\vec{n}$ sont dirigés en sens inverse
($\cos \theta < 0$ lorsque $90^\circ < \theta < 180^\circ$).



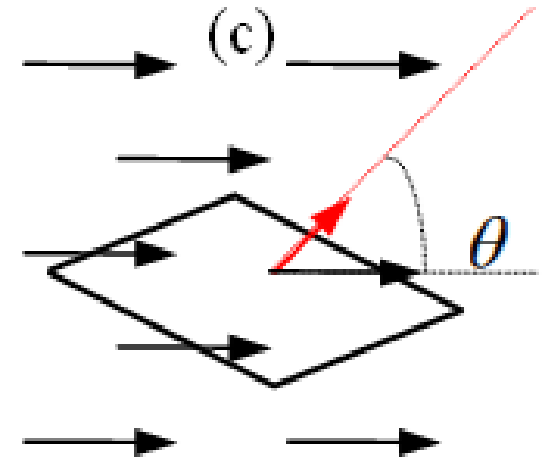
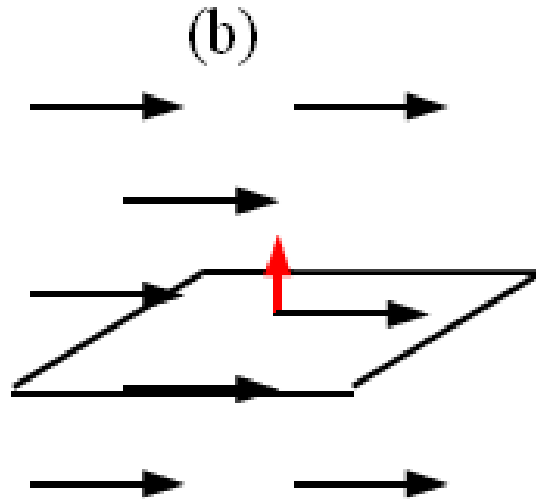
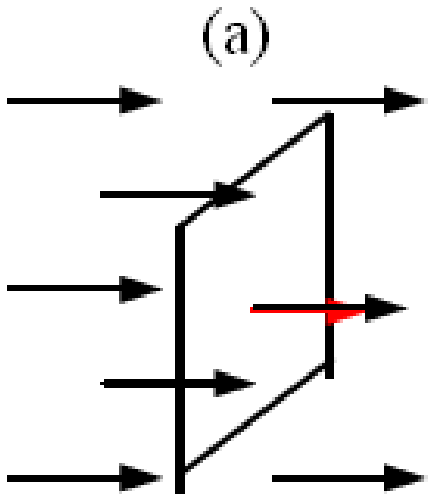
➤ $d\Phi = 0$ Si $\vec{E}$ et $\vec{n}$ sont perpendiculaire
c'est-à-dire si le vecteur $\vec{E}$ est parallèle à la surface
(le champ ne traverse pas la surface)
($\cos \theta = 0$ lorsque $\theta = 90^\circ$).



➤ L'unité SI de flux est ($V.m$)

Exemple 15

Soit un champ homogène de vecteurs $\vec{E}$ et une surface plane, dans les positions (a), (b) et (c) donner la valeur du flux :



Exemple 16

Calculer le flux du champ de vecteurs :

$$\vec{V}(M) = 4xz \, \overrightarrow{e_x} - y^2 \, \overrightarrow{e_y} + yz \, \overrightarrow{e_z}$$

à travers la surface du cube limité par : $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$

Exemple 17

Un champ électrique uniforme de 2.1 kN/C traverse une surface rectangulaire de côtés 22 cm et 28 cm .

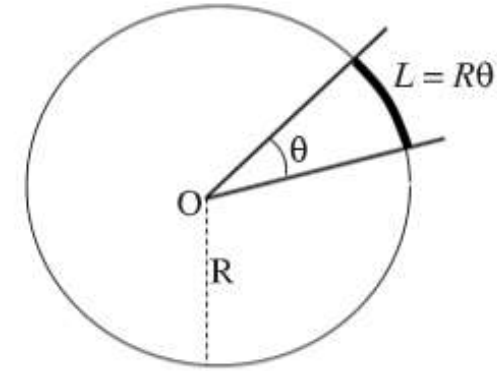
Le champ fait un angle de 30° avec la normale à la surface.

➤ Déterminer le flux électrique traversant ce rectangle.

7.4. Angle solide

➤ L'angle solide est l'analogue tridimensionnel de l'angle plan (bidimensionnel)

➤ Un angle plan θ est défini comme le rapport de la mesure L de l'arc de cercle de rayon R qu'il intercepte sur ce rayon. On a : $\theta = \frac{L}{R}$

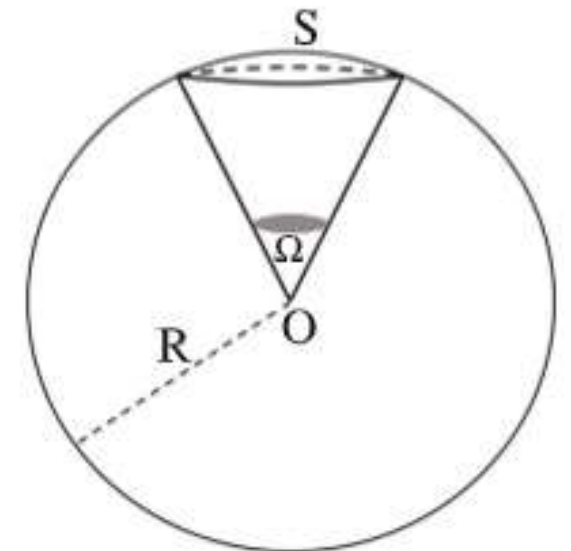


L'unité d'angle est le radian (rad) et est sans dimension.

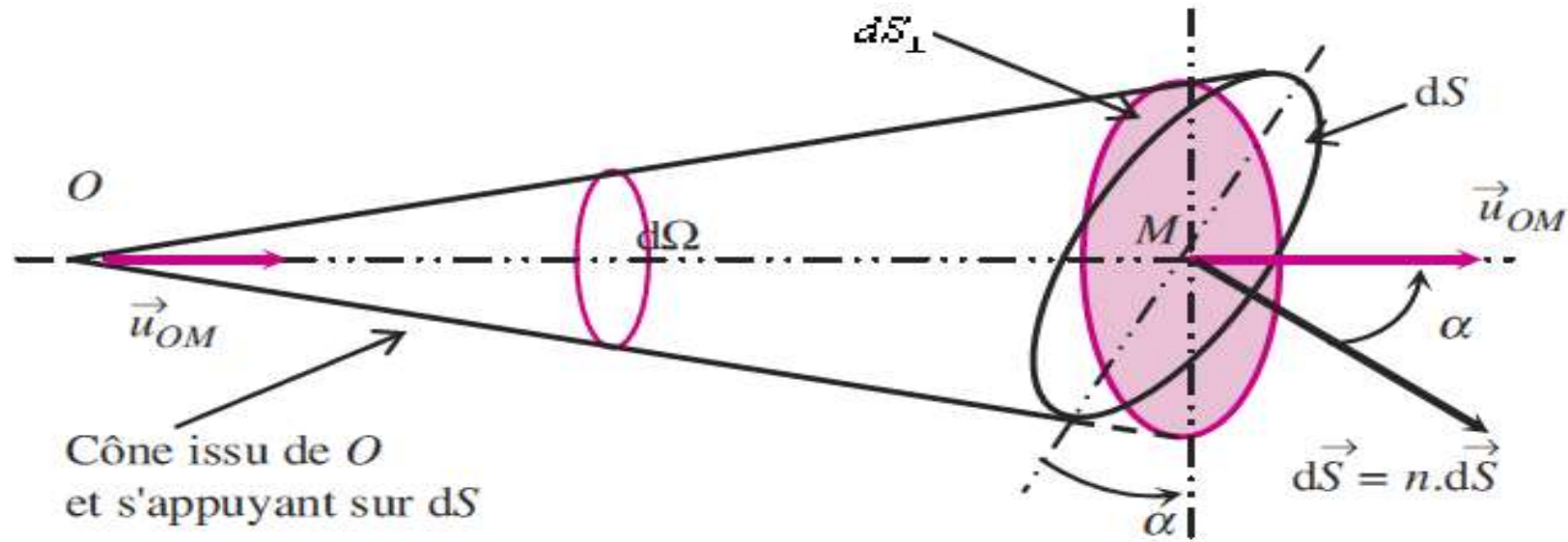
➤ De la même façon, dans l'espace, un angle solide Ω , délimité par un cône de sommet O, est défini comme le rapport de la surface S de la portion de sphère de rayon R

qu'il intercepte sur ce rayon au carrée. On a : $\Omega = \frac{S}{R^2}$

L'unité d'angle solide est le stéradian (sr) et est sans dimension.



Le plus souvent, la surface définissant l'angle solide n'est pas sphérique, aussi est-il nécessaire d'exprimer l'angle solide élémentaire en fonction de la surface élémentaire interceptée dS . Considérons le cône élémentaire de la **Figure**



D'après ce qui précède, l'angle solide élémentaire s'écrit:

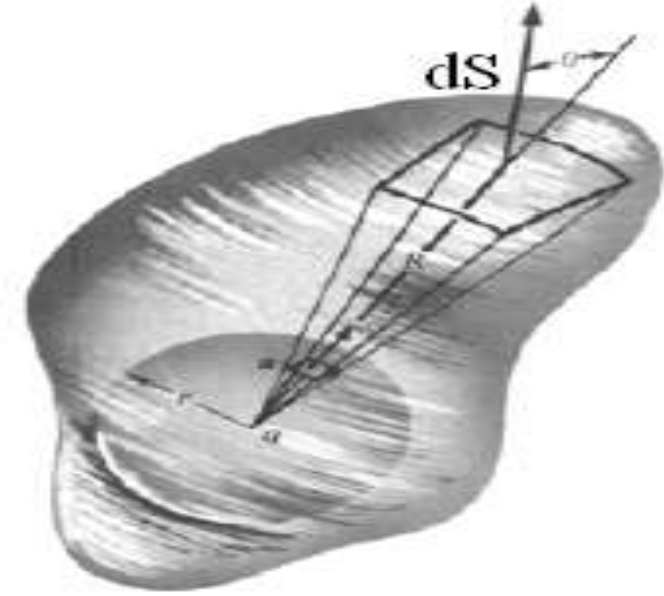
$$d\Omega = \frac{dS_{\perp}}{r^2} = \frac{\cos \alpha \, dS}{r^2} = \frac{\vec{u}_{OM} \cdot \vec{n} \, dS}{r^2}$$

7.5. Flux du champ électrostatique produit par une charge ponctuelle

➤ Comme tout système de charges peut être considéré comme un ensemble de charges ponctuelles, exprimons le flux du champ électrostatique produit par une charge ponctuelle q , placée à l'origine 0 des coordonnées.

On a :

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{u}_r}{r^2} \cdot \vec{n} dS \right] \Leftrightarrow \boxed{d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega} \quad (17)$$



➤ Ainsi, le flux du champ électrique créé par une charge électrique, à travers une surface S , est directement relié à la quantité sans dimension Ω , appelée angle solide, sous lequel on voit la surface depuis le point où est placée la charge. Comme l'angle solide couvrant tout l'espace vaut 4π nous voyons que :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Donc le flux électrique à travers une surface est proportionnel à la charge et indépendant du rayon de la surface

➤ **Flux à travers une surface fermée ne contenant pas la charge ponctuelle q créant le champ électrostatique:**

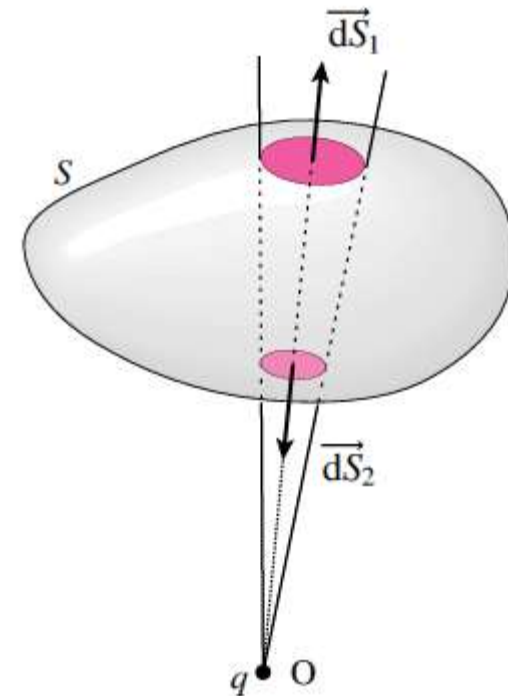
On appliquant la relation (17) à chacune des surfaces de la figure :

$$d\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS_1 \vec{u}_r}{r_1^2} \cdot \vec{n} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$d\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS_2 \vec{u}_r}{r_2^2} \cdot \vec{n} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Le flux total est :

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{dS_1 \vec{u}_r}{r_1^2} \cdot \vec{n} - \frac{dS_2 \vec{u}_r}{r_2^2} \cdot \vec{n} \right]$$



$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} [d\Omega - d\Omega] = 0$$

nous pouvons conclure que le flux total du champ électrostatique créé par une charge, à travers une surface fermée ne la contenant pas, est nul.

7.6. Théorème de Gauss :

Le flux total du champ électrostatique créé par la distribution continue à travers une surface fermée est égal au produit par $\frac{1}{\epsilon_0}$ de la somme algébrique Q_{int} , des charges contenues dans la surface.

Nous pouvons écrire : $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

La surface fermée choisie est appelée « Surface de Gauss ».

7.7. Application du théorème de Gauss

La loi de Gauss est la méthode la plus facile à utiliser pour trouver le champ électrique électrostatique pour les distributions de charge qui ont une symétrie élevée. Les distributions de charge qui sont facilement résolues, et les surfaces gaussiennes correspondantes à utiliser pour évaluer l'intégrale du flux, sont les suivantes :

- Pour les distributions de charges sphériques, la surface gaussienne est une sphère.
- Pour les distributions de charge qui ont la symétrie d'un cylindre ou fil infiniment long, la surface gaussienne est un cylindre coaxial de longueur L .
- Pour les distributions de charges qui ont la symétrie d'un plan uniforme infini, la surface gaussienne est un cylindre plat « en forme de pièce ».

L'application du théorème de Gauss peut se résumer dans les points suivants :

- Avoir une idée des éléments de symétrie et de la direction du champ.
- Pour calculer le champ en un point donné, choisir une surface de Gauss fermée passant par ce point.
- Déterminer l'expression mathématique du flux du champ électrostatique à travers la surface fermée choisie.
- Déterminer la charge intérieure à la surface de Gauss
- Appliquer le théorème de Gauss pour déduire le champ électrostatique
- En déduire le potentiel électrostatique

Exemple 18

Une charge est distribuée avec une densité de charge volumique uniforme ρ à travers le volume d'une sphère de rayon R .

Déterminez E partout.

Exemple 19

Une charge Q est répartie uniformément sur une surface sphérique creuse de rayon R .

Déterminez E à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

Exemple 20

Une charge est répartie avec une densité uniforme ρ dans tout le volume d'un cylindre très long de rayon R .

Déterminez E à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre.

Exemple 21

Une ligne droite infiniment longue porte une densité de charge linéaire uniforme.

Déterminez le champ électrique à une distance r de cette ligne.

Exemple 22

Une charge est distribuée avec une densité de charge surfacique uniforme σ sur une feuille isolante plane infinie.

Déterminez E à l'extérieur de la feuille.