

1. Formule de Taylor-Young

a) Rappels

Rappels

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction définie sur un voisinage de x_0 .

- ① Le fait d'être **dérivable en x_0** pour f entraîne la **continuité** de f en x_0 .
- ② Le fait d'être **n fois dérivable en x_0** pour f entraîne l'existence de $f^{(n-1)}$ **sur un voisinage de x_0** et a fortiori la **continuité** de f **sur un voisinage de x_0** .

Plus précisément, on a même

f est **n fois dérivable en x_0**
 $\implies f$ est de **classe $\mathcal{C}^{(n-2)}$ sur un voisinage de x_0** et de **classe $\mathcal{C}^{(n-1)}$ en x_0** .

- ③ L'écriture $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} g(x) + o(h(x))$ signifie qu'il existe une fonction ε telle que, au voisinage de x_0 , on ait $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)h(x)$ avec $\lim_{x_0} \varepsilon = 0$.

En particulier, l'écriture $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} g(x) + o((x - x_0)^n)$ signifie qu'il existe une fonction ε telle que, au voisinage de x_0 , on ait $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)(x - x_0)^n$ avec $\lim_{x_0} \varepsilon = 0$.

1. Formule de Taylor-Young

b) Énoncé

Théorème 1.1 (Formule de Taylor-Young à l'ordre n)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage de x_0 .

Si f est **n fois dérivable en x_0** , alors

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n). \end{aligned}$$

Autre formulation : en posant $h = x - x_0$,

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} & f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^n). \end{aligned}$$

Exemple 1.2 (Formule de Taylor-Young aux ordres 1 et 2)

- ① **Ordre 1 :** si f est **dérivable en x_0** , alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

- ② **Ordre 2 :** si f est **deux fois dérivable en x_0** , alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Remarque 1.3 (Comparaison Taylor-Lagrange/Taylor-Young)

Comparons les deux énoncés des formules de Taylor-Lagrange et Taylor-Young :

- **Taylor-Lagrange** : si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[x_0, x]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]x_0, x[$ (ou plus simplement si f est $(n+1)$ fois dérivable sur $[x_0, x]$), alors

$$\exists t \in]0, 1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + t(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

- **Taylor-Young** : si f est n fois dérivable en x_0 , alors il existe une fonction ε telle que, au voisinage de x_0 ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \varepsilon(x)(x - x_0)^n \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon = 0.$$

Les hypothèses portant sur f sont **plus fortes** avec la formule de Taylor-Lagrange (f $(n+1)$ fois dérivable sur un intervalle fermé) qu'avec celle de Taylor-Young (f n fois dérivable en un point). Mais la nature du résultat n'est pas la même :

- la formule de Taylor-Lagrange a un caractère **global** (les réels x et x_0 peuvent être « très » éloignés) ;
- la formule de Taylor-Young donne un résultat **local** (elle n'a de sens qu'au voisinage d'un point).

Voici une liste d'exemples qu'il faut connaître.

Exemple 1.4 (Fonctions usuelles au voisinage de 0)

- $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
 $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Définition 2.1 (Développement limité en x_0)

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (pas nécessairement en x_0).

On dit que f admet un **développement limité d'ordre n en x_0** (noté $DL_n(x_0)$) lorsqu'il existe des coefficients $a_0, \dots, a_n$ tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Le polynôme $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ est appelé **partie régulière** du $DL_n(x_0)$.

Autre formulation : en posant $h = x - x_0$,

$$f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_nh^n + o(h^n).$$

On peut également définir des **développements limités à droite et à gauche** en x_0 .

Remarque 2.2 (Formule Taylor-Young et DL)

La formule de Taylor-Young fournit pour toute fonction f **n fois dérivable en x_0** un $DL_n(x_0)$ de coefficients $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $0 \leq k \leq n$.

Mais en pratique, pour établir des développements limités en x_0 , on utilisera rarement cette formule qui nécessite le calcul des dérivées successives de la fonction.

On s'appuiera sur les développements limités obtenus en 0 par cette formule pour les fonctions usuelles et on utilisera le **changement de variable** $h = x - x_0$ ainsi que les propriétés des DL qui seront énoncées ultérieurement.

Remarque 2.3 (Développement limité en l'infini)

Étant donnée une fonction f définie au voisinage de $\pm\infty$, le changement de variable $X = 1/x$ permet d'obtenir un **développement limité de f en l'infini** à partir d'un $DL_n(0)$ de $f(1/x)$, c'est-à-dire une écriture valable au voisinage de l'infini de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Exemple 2.4 (Développement asymptotique et asymptote)

Si une fonction g définie au voisinage de l'infini est telle que $g(x)/x$ admette un $DL_2(\pm\infty)$ de la forme $a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on peut écrire

$$g(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} a_0x + a_1 + \frac{a_2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cette écriture est appelée **développement limité généralisé** ou **développement asymptotique** et met en évidence une **asymptote** pour g d'équation $y = a_0x + a_1$.

De plus le signe du coefficient a_2 indique la **position locale** au voisinage de $\pm\infty$ de la courbe représentative de g par rapport à cette asymptote.

Par exemple, au voisinage de $+\infty$, si $a_2 > 0$ (resp. $a_2 < 0$), alors la courbe est **au-dessus** (resp. **au-dessous**) de son asymptote.

Proposition 2.5 (DL_0 et DL_1)

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 .

- ① f admet un $DL_0(x_0)$ ssi f admet une **limite finie en x_0** . Plus précisément :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + o(1) \iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = a_0.$$

f est alors **prolongeable par continuité en x_0** . On posera $f(x_0) = a_0$.

- ② f admet un $DL_1(x_0)$ ssi f est **dérivable en x_0** (après prolongement par continuité en x_0). Plus précisément :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_0 \text{ et } f'(x_0) = a_1.$$

Remarque 2.6 (DL et dérivabilité d'ordre supérieur)

Si $n \geq 2$, pour une fonction f définie sur un voisinage I de x_0 , le fait d'être n fois dérivable en x_0 est une **condition suffisante** pour admettre un $DL_n(x_0)$ (donné par la formule de Taylor-Young) mais **non nécessaire**. Autrement dit, l'existence d'un $DL_n(x_0)$ avec $n \geq 2$ **ne garantit pas** l'existence de la dérivée n^e de f en x_0 .

Exemple : la fonction $x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un $DL_2(0)$ mais n'est pas 2 fois dérivable en 0.

Proposition 2.7 (Diverses propriétés)

- ① Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors f admet un $DL_p(x_0)$ pour tout $p \leq n$ obtenu par « troncature » au degré p du $DL_n(x_0)$.
- ② Si une fonction admet un $DL_n(x_0)$ alors celui-ci est **unique** (i.e. les coefficients a_k sont uniques).

Conséquences :

- Si f admet un $DL_n(x_0)$ et est **n fois dérivable en x_0** , alors la formule de Taylor-Young fournit **le** $DL_n(x_0)$ de f :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

- Si f est **paire** et admet un $DL_n(0)$ alors sa partie régulière est **paire** (i.e. uniquement avec des exposants pairs).
- Si f est **impaire** et admet un $DL_n(0)$ alors sa partie régulière est **impaire** (i.e. uniquement avec des exposants impairs).

Exemple 2.8

- ① Les fonctions $\cos$ et $\cosh$ sont **paire**s et admettent des DL de partie régulière **paire**.
- ② Les fonctions $\sin$ et $\sinh$ sont **impair**s et admettent des DL de partie régulière **impaire**.

Proposition 2.9 (Addition, multiplication, division)

Soit f et g deux fonctions admettant des $DL_n(x_0)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P(x - x_0) + o((x - x_0)^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} Q(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

où P et Q sont des polynômes de degré au plus n . Alors :

- ❶ $f + g$ admet pour $DL_n(x_0)$:

$$(f + g)(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} (P + Q)(x - x_0) + o((x - x_0)^n);$$

- ❷ $f \times g$ admet pour $DL_n(x_0)$:

$$(f \times g)(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} (P \times Q)_{(n)}(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

où $(P \times Q)_{(n)}$ est le polynôme déduit de $P \times Q$ en ne conservant que les termes de degré au plus n ;

- ❸ si de plus $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ admet pour $DL_n(x_0)$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} R(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

où R est le quotient de la division suivant les puissances **croissantes** de P par Q à l'ordre n .

Exemple 2.10 (Autour des fonctions cos et ch)

Calculons les $DL_7(0)$ des fonctions $x \mapsto \cos x + \operatorname{ch} x$, $x \mapsto (\cos x)(\operatorname{ch} x)$, $x \mapsto (\cos x - 1)(\operatorname{ch} x - 1)$.

On part des $DL_7(0)$ de $\cos x$ et $\operatorname{ch} x$:

$$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^7) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + o(x^7).$$

- **Somme** : $\cos x + \operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^7)$.
- **Produit** : $(\cos x)(\operatorname{ch} x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^7)$.

Remarque : si on développe complètement le produit des parties régulières, on trouve

$$\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6\right) = 1 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2880}x^8 - \frac{1}{518400}x^{12}.$$

Les termes $\frac{1}{2880}x^8$ et $-\frac{1}{518400}x^{12}$ sont inutiles puisque l'on doit tronquer ce produit à l'ordre 7. De plus, ces termes **ne sont pas significatifs**. Si l'on pousse les DL de cos et ch à l'ordre 12, on trouve en effet $(\cos x)(\operatorname{ch} x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2520}x^8 + \frac{1}{7484400}x^{12} + o(x^{12})$.

- **Autre produit** : $(\cos x - 1)(\operatorname{ch} x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{4}x^4 + o(x^7)$.

Remarque : ici, il est suffisant de prendre des DL de cos et ch d'ordre 5 :

$$\cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5).$$

Exemple 2.11 (Tangente/cotangente)

Calculons le $DL_3(0)$ de la fonction $\tan$. On part des $DL_3(0)$ de $\cos x$ et $\sin x$:

$$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \quad \text{et} \quad \sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

- **Division de $\sin x$ par $\cos x$.**

Puisque $\cos(0) \neq 0$, $\tan$ admet un $DL_3(0)$ obtenu par division suivant les puissances croissantes de $x - \frac{1}{6}x^3$ par $1 - \frac{1}{2}x^2$ à l'ordre 3 :

$$\begin{array}{r|l} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) & 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \\ -(x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)) & x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ \hline \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) & \\ -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3) & \\ \hline o(x^3) & \end{array} \quad \text{soit} \quad \tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

- **Division de $\cos x$ par $\sin x$.**

En revanche, $\sin(0) = 0$. Pour obtenir un développement de $\cot$, on ne peut pas utiliser directement la règle, mais on peut toutefois effectuer **formellement** une division suivant les puissances croissantes de $1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ par $x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$:

$$\begin{array}{r|l} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) & x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ -(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)) & \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + o(x) \\ \hline -\frac{1}{3}x^2 + o(x^2) & \\ -\frac{1}{3}x^2 + o(x^2) & \\ \hline o(x^2) & \end{array} \quad \text{soit} \quad \cot x \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + o(x).$$

Il s'agit d'un DL généralisé...

Proposition 2.19 (Dérivation/intégration)

Soit f une fonction définie **continue** en x_0 et **dérivable** au voisinage de x_0 .

Si f' admet un $DL_n(x_0)$ alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ en x_0 et admet un $DL_{n+1}(x_0)$.

Plus précisément, si le $DL_n(x_0)$ de f' est de la forme

$$f'(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

alors le $DL_{n+1}(x_0)$ de f est donné par

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + o((x - x_0)^{n+1}).$$

Exemple 2.20 (Arctangente)

Appliquons la règle précédente à la fonction $f = \arctan$ en 0.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. De plus f' admet le $DL_n(0)$

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

Donc f admet le $DL_{n+1}(0)$ obtenu par intégration (avec $f(0) = 0$) :

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

Remarque 2.21 (Contre-exemple)

Soit $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. f admet un $DL_2(0)$ alors que f' n'admet pas de $DL_1(0)$.