

Exercice 1

1 e^x à l'ordre 3

Étape 1 : rappeler la formule de Taylor en 0

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

Étape 2 : dérivées de $f(x) = e^x$ Toutes les dérivées valent e^x

Étape 3 : valeurs en 0 $f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1, \quad f'''(0) = 1$

Étape 4 : remplacement

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

2 $\sin x$ à l'ordre 3

Étape 1 : dérivées successives

$$\sin x \rightarrow \cos x \rightarrow -\sin x \rightarrow -\cos x$$

Étape 2 : valeurs en 0

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad -\sin 0 = 0, \quad -\cos 0 = -1$$

Étape 3 : formule de Taylor

$$\sin x = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Résultat

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

3 $\cos x$ à l'ordre 2

Étape 1 : dérivées

$$\cos x \rightarrow -\sin x \rightarrow -\cos x$$

Étape 2 : valeurs en 0

$$\cos 0 = 1, \quad -\sin 0 = 0, \quad -\cos 0 = -1$$

Étape 3 : formule de Taylor

$$\cos x = 1 + 0 \cdot x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

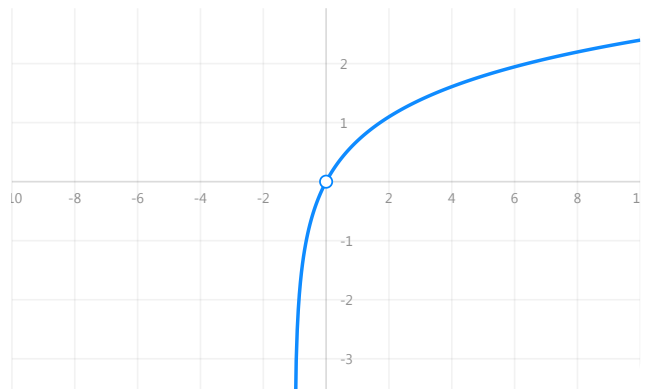
Résultat

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

4 $\ln(1+x)$ à l'ordre 3

Étape 1 : poser la fonction

$$f(x) = \ln(1+x)$$



Étape 2 : dérivées

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Étape 3 : valeurs en 0

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 2$$

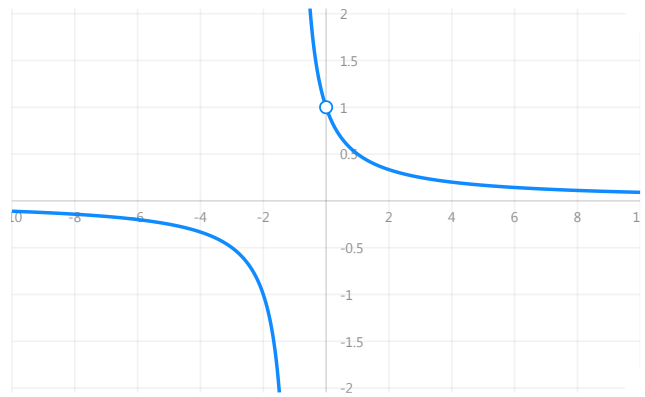
Étape 4 : formule de Taylor

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

5 $\frac{1}{1+x}$ à l'ordre 3

Étape 1 : poser la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$



Étape 2 : dérivées

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

Étape 3 : valeurs en 0

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = -1, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = -6$$

Étape 4 : formule de Taylor

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

Exercice 2

1 e^{2x} à l'ordre 3

Étape 1 : DL de base

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Étape 2 : substitution $x \mapsto 2x$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3)$$

Étape 3 : simplification

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

2 $\sin(3x)$ à l'ordre 3

Étape 1 : DL de base

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Étape 2 : substitution $x \mapsto 3x$

$$\sin(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3)$$

Étape 3 : calcul

$$\sin(3x) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)$$

3 $\ln(1 - 2x)$ à l'ordre 2

Étape 1 : DL de base

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Étape 2 : substitution $x \mapsto -2x$

$$\ln(1 - 2x) = -2x - \frac{(-2x)^2}{2} + o(x^2)$$

Étape 3 : simplification

$$\ln(1 - 2x) = -2x - 2x^2 + o(x^2)$$

4 $\cos(x^2)$ à l'ordre 4

Étape 1 : DL de base $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Étape 2 : substitution $x \mapsto x^2$ $\cos(x^2) = 1 - \frac{(x^2)^2}{2} + o(x^4)$

Étape 3 : simplification

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

Exercice 3

1 $e^x + \ln(1+x)$ à l'ordre 2

Étape 1 : DL de chaque fonction

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Étape 2 : somme terme par terme

$$(1 + x + \frac{x^2}{2}) + (x - \frac{x^2}{2}) = 1 + 2x + 0 \cdot x^2$$

Étape 3 : résultat final

$$e^x + \ln(1+x) = 1 + 2x + o(x^2)$$

2 $e^x \cdot \sin x$ à l'ordre 2

Étape 1 : DL de chaque fonction

$$e^x = 1 + x + o(x^2), \quad \sin x = x + o(x^2)$$

Étape 2 : produit $(1+x) \cdot x = x + x^2$

Étape 3 : résultat final

$$e^x \cdot \sin x = x + x^2 + o(x^2)$$

3 $(1+x) \cdot e^x$ à l'ordre 2

Étape 1 : DL de chaque facteur

$$1+x \text{ est déjà un polynôme, } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Étape 2 : produit

$$(1+x)(1+x+\frac{x^2}{2}) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

Étape 3 : résultat final

$$(1+x)e^x = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

4 $\cos x \cdot \ln(1+x)$ à l'ordre 2

Étape 1 : DL de chaque fonction

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Étape 2 : produit

$$\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{x^2}{2}\right) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^2)$$

On ne garde que les termes jusqu'à l'ordre 2, donc $x - \frac{x^2}{2}$.

Étape 3 : résultat final

$$\cos x \cdot \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Exercice 4

1 $\frac{e^x}{1+x}$ à l'ordre 2

Étape 1 : DL de chaque fonction

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

Étape 2 : utiliser $\frac{e^x}{1+x} = e^x \cdot \frac{1}{1+x}$

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \cdot (1 - x + x^2)$$

Étape 3 : développer (en gardant les termes jusqu'à x^2)

- $1 \cdot 1 = 1$
- $1 \cdot (-x) + x \cdot 1 = -x + x = 0$
- $1 \cdot x^2 + x \cdot (-x) + \frac{x^2}{2} \cdot 1 = x^2 - x^2 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$

Étape 4 : résultat final

$$\frac{e^x}{1+x} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

2 $\frac{\sin x}{x}$ à l'ordre 2

Étape 1 : DL du sinus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Étape 2 : division par x

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

Étape 3 : résultat final

$$\boxed{\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$$

3 $\frac{\ln(1+x)}{x}$ à l'ordre 2

Étape 1 : DL du logarithme

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Étape 2 : division par x

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

Attention ici : l'ordre de x change, on ne garde que les termes jusqu'à x^1 .

Étape 3 : résultat final

$$\boxed{\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)}$$

Exercice 5

Méthode générale

1. Poser $x = 1 + h$, avec $h \rightarrow 0$.
 2. Réécrire la fonction en termes de h .
 3. Développer la fonction autour de $h = 0$ avec les DL connus.
 4. Remettre éventuellement en termes de x .
-

1 $\ln x$ au voisinage de 1 à l'ordre 2

Étape 1 : substitution

$$x = 1 + h \quad \Rightarrow \quad \ln x = \ln(1 + h)$$

Étape 2 : utiliser le DL connu du logarithme

$$\ln(1 + h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$$

Étape 3 : résultat

$$\ln x = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + o((x - 1)^2)$$

2 $\sqrt{x}$ au voisinage de 1 à l'ordre 2

Étape 1 : substitution

$$x = 1 + h \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = \sqrt{1 + h}$$

Étape 2 : utiliser le DL connu de $\sqrt{1 + h}$

$$\sqrt{1 + h} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)$$

Étape 3 : résultat

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{x - 1}{2} - \frac{(x - 1)^2}{8} + o((x - 1)^2)$$

3 $\frac{1}{x}$ au voisinage de 1 à l'ordre 2

Étape 1 : substitution

$$x = 1 + h \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{1 + h}$$

Étape 2 : utiliser le DL de $\frac{1}{1+h}$

$$\frac{1}{1 + h} = 1 - h + h^2 + o(h^2)$$

Étape 3 : résultat

$$\frac{1}{x} = 1 - (x - 1) + (x - 1)^2 + o((x - 1)^2)$$

Bilan méthode — changement de point

- Toujours poser $x = a + h$ pour réduire au développement autour de 0.
- Réutiliser les DL connus de fonctions en 0.
- Attention à l'ordre : le terme dominant est souvent h , pas x .
- Re-exprimer le résultat en fonction de $x - a$ pour plus de clarté.

Astuce : cette technique sert pour **toutes les fonctions développées autour d'un point différent de 0** et est très utilisée pour les limites ou les développements d'ordre supérieur.

Exercice 6

$$\boxed{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Étape 1 : DL de e^x au voisinage de 0 à l'ordre 2

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Étape 2 : remplacer dans la limite

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 1 - x}{x^2}$$

Étape 3 : simplification

$$\frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}$$

Étape 4 : limite

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

Étape 1 : DL de $\sin x$ au voisinage de 0 à l'ordre 3

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Étape 2 : remplacer dans la limite

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - x}{x^3}$$

Étape 3 : simplification

$$\frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}$$

Étape 4 : limite

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}}$$

$$\boxed{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

Étape 1 : DL de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Étape 2 : remplacer dans la limite

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - x}{x^2}$$

Étape 3 : simplification

$$\frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}$$

Étape 4 : limite

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}}$$

Bilan méthode

1. Remplacer la fonction par son DL adapté à l'ordre (assez grand pour que le terme dominant survive).
2. Simplifier le numérateur et le dénominateur.
3. Identifier le terme dominant : c'est lui qui donne la limite.
4. Écrire le reste en $o(x^n)$ et vérifier qu'il disparaît dans la limite.

Exercice 7

1 e^{x^2} à l'ordre 4

Étape 1 : DL de base de e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Étape 2 : substitution $x \mapsto x^2$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{6} + o(x^6)$$

Étape 3 : simplification jusqu'à x^4

- x^2 reste x^2
- $(x^2)^2/2 = x^4/2$
- les termes supérieurs $(x^6/6)$ deviennent $o(x^4)$

Résultat

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

2 $\ln(1 + x + x^2)$ à l'ordre 2

Étape 1 : poser $h = x + x^2$

$$\ln(1 + x + x^2) = \ln(1 + h)$$

Étape 2 : DL de $\ln(1 + h)$

$$\ln(1 + h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$$

Étape 3 : remplacer $h = x + x^2$

$$h^2 = (x + x^2)^2 = x^2 + 2x^3 + x^4$$

Étape 4 : garder les termes jusqu'à x^2

$$\ln(1 + x + x^2) = (x + x^2) - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Résultat

$$\ln(1 + x + x^2) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

3 $\frac{\sin x}{1 - \cos x}$ à l'ordre 1 (ou 3 si nécessaire)

Étape 1 : DL de $\sin x$ et $\cos x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Étape 2 : DL de $1 - \cos x$

$$1 - \cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Étape 3 : former le quotient

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)}$$

Étape 4 : factoriser les puissances de x

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{x \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)}{x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + o(x^2)\right)} = \frac{2}{x} \cdot \frac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)}$$

Étape 5 : utiliser la formule $\frac{1+u}{1+v} = 1 + u - v + o(u, v)$

$$\frac{1 - \frac{x^2}{6}}{1 - \frac{x^2}{12}} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{12} + o(x^2) = 1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$$

Étape 6 : résultat final

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{2}{x} - \frac{x}{6} + o(x)$$

Bilan méthode — Exercice 7

1. Pour les **substitutions compliquées**, écrire un **nouveau h** si nécessaire.
2. Pour les **quotients**, factoriser les puissances dominantes.
3. Utiliser la formule $\frac{1+u}{1+v} = 1 + u - v + o(u, v)$ pour simplifier.
4. Toujours **garder les termes jusqu'à l'ordre demandé**.