

CHAPITRE1 : Fonctions Holomorphes

1.1 Le plan Complexe $\mathbb{C}$

✓ On peut définir un nombre complexe z par la donnée de deux coordonnées réels:

$$z = (x, y) = x + iy \text{ où } i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1 \text{ avec } x, y \in \mathbb{R}^2$$

On appelle x la partie réelle de z et on note $x = \operatorname{Re}(z)$, tandis que y est la partie imaginaire de z et on note $y = \operatorname{Im}(z)$.

✓ Tout nombre complexe possède un conjugué noté $\bar{z} : \bar{z} = x - iy$.

Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes, alors on a :

$$\text{➤ } z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

$$\text{➤ } z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$\text{➤ } z - \bar{z} = i2 \operatorname{Im}(z)$$

$$\text{➤ } z \cdot z' = xx' - yy' + i(x'y + xy')$$

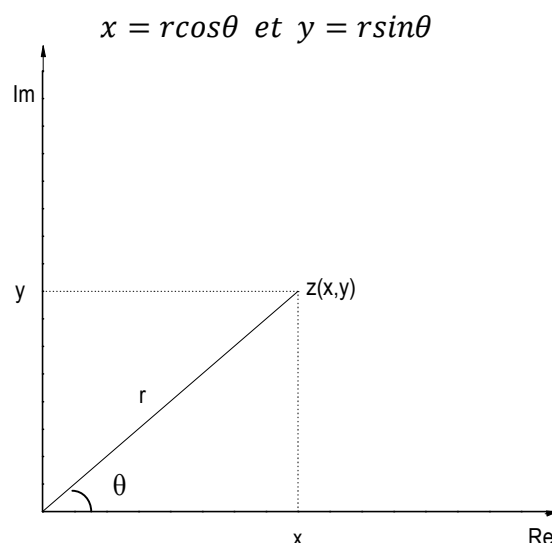
$$\text{➤ } z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\text{➤ } \frac{z'}{z} = \frac{z' \bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{z' \bar{z}}{|z|^2}$$

Forme polaire des nombres complexes

Un nombre complexe peut être aussi représenté dans un plan de type cartésien où l'axe horizontal mesure la *valeur* de x (l'axe des réels), et l'axe vertical mesure la *valeur* de y (l'axe des imaginaires).

On remarque qu'on peut remplacer le couple (x, y) par le couple (r, θ) d'où :



Avec $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, et θ est appelé l'argument ou l'amplitude de z .

Donc on peut récrire z sous la forme : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta} = |z| e^{i \arg z}$

Cette dernière représentation est appelée la notation polaire, elle permet de calculer facilement toute puissance, positive, négative ou fractionnelle d'un nombre complexe, ce qui conduit d'écrire les propriétés suivantes :

- $z.z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}$
- $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$
- $z^n = r^n e^{in\theta}$

1.2 Fonction d'une variable Complexe

1.2.1 Définition: On appelle fonction d'une variable complexe, une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto f(z)$$

Etant donné qu'on peut écrire le nombre complexe z comme $z = x + iy$, par conséquent on peut écrire aussi la fonction $f(z)$ (qui est également un nombre complexe) comme :

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y), \text{ où } \operatorname{Re}f(z) = P(x, y) \text{ et } \operatorname{Im}f(z) = Q(x, y).$$

On est donc ramené à une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, et ceci en posant $\varphi(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$.

Exemple1 :

La fonction $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy \Rightarrow P(x, y) = x^2 - y^2$ et $Q(x, y) = 2xy$

1.2.2 Limite : Soit $f(z)$ une fonction complexe à une variable complexe; on dit que $f(z)$ admet une limite

l en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \text{tel que } |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$$

$$\text{Et on note } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$$

Posons alors $l = a + ib$ où a et b sont deux réels, alors :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \Leftrightarrow \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} P(x, y) = a \text{ et } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} Q(x, y) = b \right)$$

On a aussi:

$$\bullet \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \text{ tel que } |z| > A \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$$

$$\bullet \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z)| > A$$

- $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \beta > 0 \text{ tel que } |z| > \beta \Rightarrow |f(z)| > A$

1.2.3 Continuité

On dit que la fonction $f(z)$ est continue en z_0 , si elle admet une limite en z_0 et que cette limite vaut $f(z_0)$.

Propriétés :

- si $f(z)$ et $g(z)$ sont continues en z_0 alors, $f + g, f \cdot g, f \circ g$ et $\frac{f}{g}$ ($g(z_0) \neq 0$) le sont aussi.
- $f(z)$ continue en $z_0 \Leftrightarrow P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont aussi continues en (x_0, y_0) .

1.3 Fonctions Holomorphes

1.3.1 Définition

Soit D une région dans le plan complexe et soit $f(z)$ une fonction de D dans $\mathbb{C}$. On dit que $f(z)$ est holomorphe en z_0 si $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe, et dans ce cas elle sera notée $f'(z_0)$.

f est holomorphe en $z_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable en z_0 .

La fonction est dite holomorphe dans D si elle est dérivable en chaque point z de D .

Propriétés :

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$

1.3.2 Conditions de Cauchy-Riemann

La fonction $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ est différentiable dans un domaine D du champ complexe $\mathbb{C}$, si et seulement si, les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont différentiables en tout point de D , et si leurs dérivées vérifient **les conditions de Cauchy-Riemann** :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned}}$$

(1)

1.3.3 Théorème : La dérivée $f'(z)$ donc en un point z quelconque est donnée par:

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)}$$

Exemples :

➤ 1. $f(z) = z^2$

$$\forall z \in \mathbb{C}: f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy \text{ d'où: } \begin{cases} P(x, y) = (x^2 - y^2) \\ Q(x, y) = 2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial P}{\partial y} \end{cases} \text{ et aussi}$$

Donc on a les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées, par conséquent f est dérivable, et

$$f'(z) = 2x + 2iy = 2(x + iy) = 2z$$

$$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}: f'(z) = 2z$$

➤ 2. $f(z) = \frac{1}{z}$

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}: f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \text{ d'où: } \begin{cases} P(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ Q(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial P}{\partial y} \end{cases} \text{ et aussi}$$

Donc on a les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées, par conséquent f est dérivable, et

$$f'(z) = \frac{y^2-x^2+i2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2-i2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(\bar{z})^2}{(z\bar{z})^2} = -\frac{1}{z^2}$$

$$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}: f'(z) = -\frac{1}{z^2}$$

1.3.4 Propriétés

I. Remarquons qu'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(P + iQ)}{\partial x} + i \frac{\partial(P + iQ)}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$$

Une forme condensée des conditions de Cauchy-Riemann est:

$$\boxed{\forall (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2: \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0} \quad (2)$$

II. On a aussi: $df(z) = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$

Comme : $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}$ (3)

Et que $\begin{cases} x = \frac{z+\bar{z}}{2} \\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{-1}{2i} \end{cases}$

En substituant ces dernières relations dans(3) et en utilisant(2), on a: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

Finalement, f dérivable $\Rightarrow df(z) = \frac{\partial f}{\partial z} dz = f'(z)dz$

Donc, si f est dérivable, $f(z)$ ne doit pas contenir de termes en z (aussi ni $\Re z = \frac{z+\bar{z}}{2}$, ni

$\Im f z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, ni $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$). Alors on peut écrire les conditions de Cauchy-Riemann sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0}$$

Exemple :

Soit la fonction $f(z)$ définie par : $f(z) = \frac{1}{z} - z^2 \cdot \Im z$

On a alors : $f(z) = \frac{1}{z} - z^2 \cdot \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = \frac{1}{z} - \frac{z^3}{2i} + \frac{z^2\bar{z}}{2i} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{z^2}{2i} \neq 0$

D'où la fonction $f(z)$ n'est pas dérivable.

1.4 Fonctions Harmoniques

Si les dérivées partielles secondes de P et Q par rapport à x et à y ($\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}$) existent et sont continues dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, alors on peut tirer des conditions de Cauchy- Riemann (1) :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

Par conséquent, les parties réelles et imaginaires d'une fonction holomorphe vérifient l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \text{ou} \quad \Delta \Psi = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

L'opérateur Δ est appelé le Laplacien.

Des fonctions telles que $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ qui vérifient l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}$ sont appelée

fonctions harmoniques et sont dites harmoniques dans $\mathbb{R}$.

Théorème : soit P une fonction harmonique de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, alors il existe une fonction f harmonique de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $Re(f) = P$ ou bien $(Im(f) = P)$.

Exemple : Trouver une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $Re(f) = P(x, y) = \cos x \cosh y$

Solution : le domaine de définition de P est $\mathbb{R}^2$, vérifiant que P est harmonique :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\sin x \cosh y \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\cos x \cosh y \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos x \sinh y \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \cos x \cosh y \quad (2)$$

Par addition de (1) et (2) on obtient $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$ ce qui montre que P est harmonique, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f holomorphe telle que $f = P + iQ$, les conditions de Cauchy- Riemann s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = -\sin x \cosh y \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos x \sinh y \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos x \sinh y \end{cases} \quad (2)$$

De l'équation (1) on tire $Q(x, y) = \int -\sin x \cosh y \partial y \Rightarrow Q(x, y) = -\sin x \sinh y + g(x)$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -\cos x \sinh y + g'(x)$$

Et de l'équation (2) $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\cos x \sinh y \Rightarrow g'(x) = 0$ alors $g(x) = C^{te}$

D'où $Q(x, y) = -\sin x \sinh y + C$

Finalement on trouve :

$$f = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y + ic$$