

Conducteurs et Condensateurs

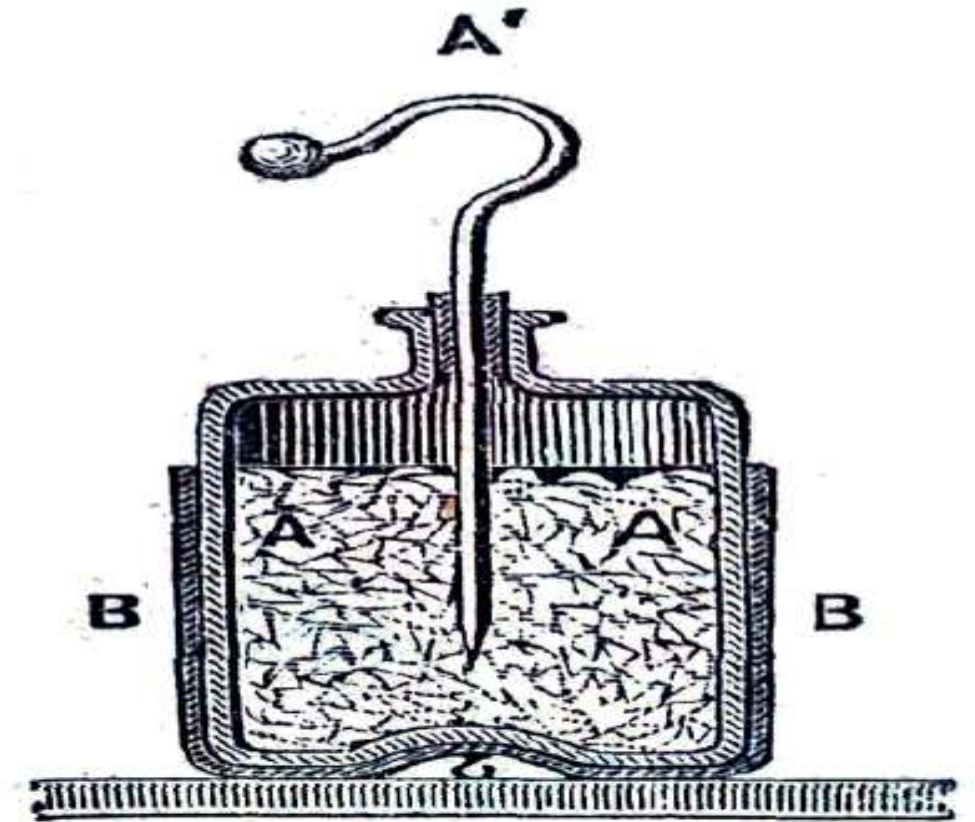
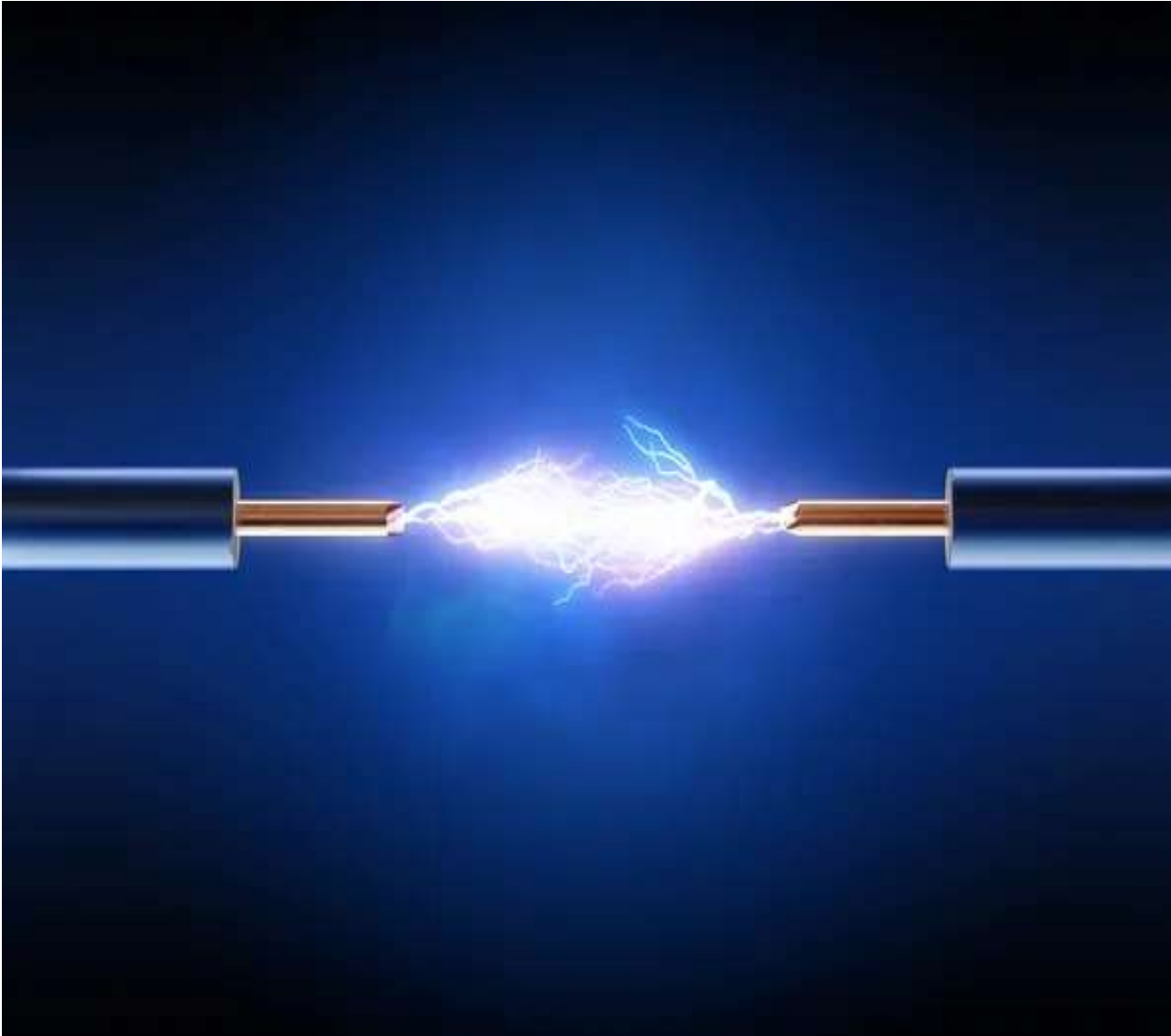


FIG. 142. — Bouteille de Leyde. — A, armature intérieure; B, armature extérieure.

1. Introduction

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés uniquement aux charges électriques et à leurs effets.

Que se passe-t-il pour un corps **conducteur** dans lequel les charges sont **libres de se déplacer** ?

2. Les Conducteurs

- Les conducteurs sont des milieux dans lesquels existent des charges **libres** (positives ou négatives) pouvant être mises en **mouvement** sous l'action d'un champ électrique.
- Parmi les conducteurs, on peut citer :

Conducteurs	Porteurs de charge libres
Métal (Cu, Ag, Au, Al, ...)	électrons libres
Semi-conducteur (<i>Si</i> , <i>GaAs</i> ...)	paires électron - trou
Solution électrolytique (KOH_{aq} , $NaCl_{aq}$...)	ions dissous
Plasma (gaz ionisé)	protons, électrons

- Du point de vue microscopique, Un conducteur (un métal par exemple) peut être considéré comme un réseau d'ions positifs, rigidement liés les uns aux autres, ne pouvant que vibrer autour de leur position d'équilibre et d'un gaz d'électrons libres de se déplacer.
- Ces électrons de conduction sont en très grand nombre, leur densité n est de l'ordre de $10^{30} \text{ electron}/\text{m}^3$ et leur vitesse moyenne est de quelques milliers de km/s .
- Les conducteurs métalliques se caractérisent donc par une grande quantité d'électrons pouvant se déplacer librement et très rapidement dans le matériau. Cette spécificité des conducteurs est à l'origine de propriétés électrostatiques particulières, propriétés que nous allons maintenant étudier.

3. Conducteur à l'équilibre

➤ Un conducteur est dit en **équilibre électrostatique** si toutes ses charges sont **immobiles** ; c'est-à-dire que les charges intérieures ne sont soumises à **aucune force macroscopique**.

➤ Nous ne considérons que des conducteurs homogènes et à température uniforme, ceci revient à dire que le **champ électrique** macroscopique à l'**intérieur** du conducteur est **nul** :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

➤ Puisque ce champ électrique dérive d'un potentiel $V(\vec{r})$, on a : $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = \vec{0}$

➤ Ceci revient à dire que le **potentiel électrostatique est le même** en tous points du conducteur :

$$V(\vec{r}) = Cte$$

➤ Ceci constitue une propriété fondamentale d'un conducteur à l'équilibre.

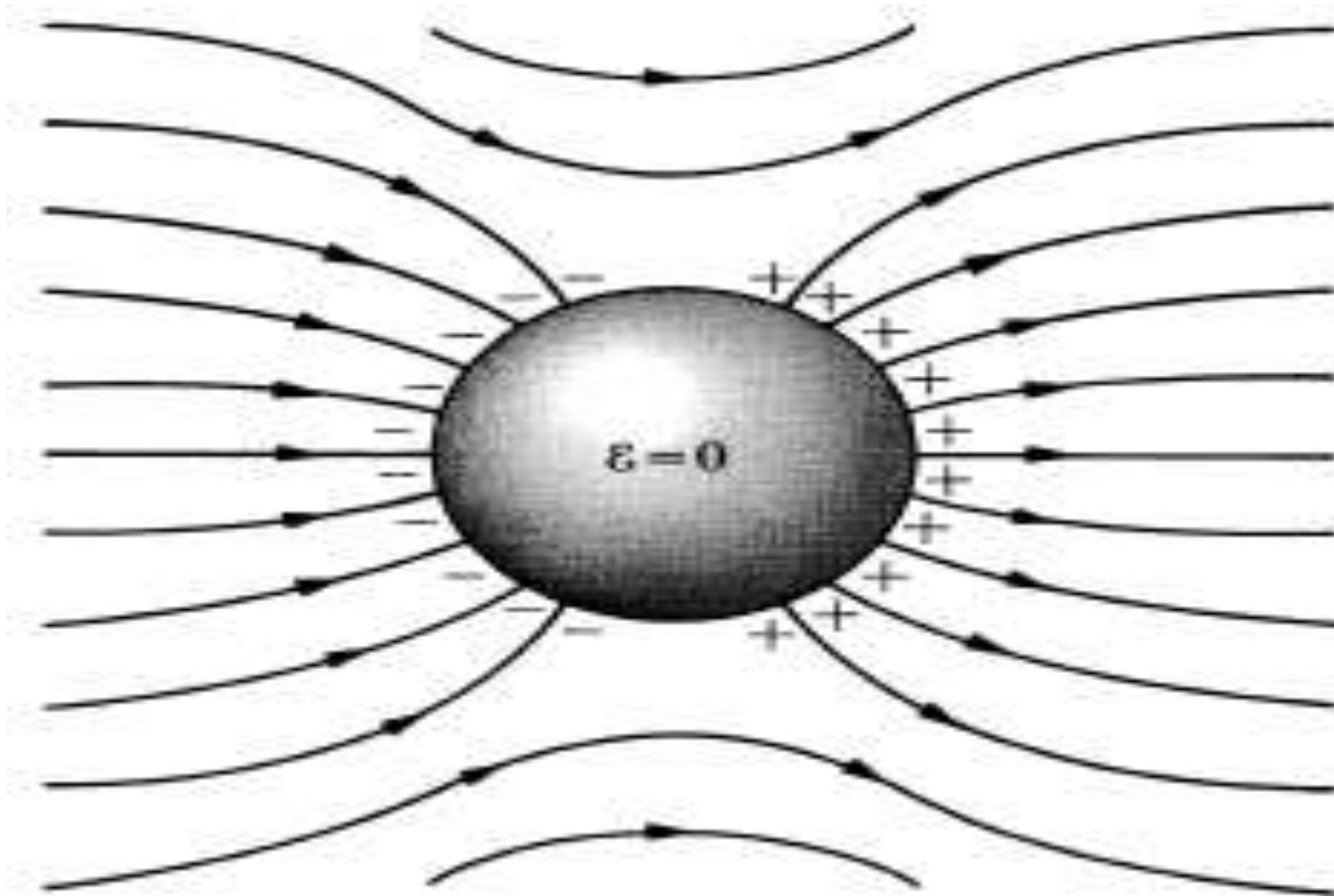
3.1. Distribution de charges : charges de surface

- L'équilibre d'un conducteur impose une certaine forme de distribution de charges dans le conducteur.
- En effet, selon le théorème de Gauss, la condition d'équilibre ($E = 0$) implique que la charge électrique totale (électrons et ions) à l'intérieur d'un conducteur soit nulle :

$$\rho_{int} = 0$$

- Cette caractéristique d'un conducteur à l'équilibre s'applique aussi bien à un conducteur chargé qu'à un conducteur neutre. Ainsi, lorsque le conducteur est chargé, la condition d'équilibre impose aux charges de se localiser au voisinage de la surface du conducteur.
- Les charges électriques mobiles dans un conducteur **s'accumulent sur la surface** jusqu'à ce que le champ qu'elles produisent compense complètement le champ extérieur appliqué au conducteur, produisant ainsi un état d'équilibre.

➤ Nous concluons alors que, *à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrique, le champ électrique est nul.*



Exemple 1

Deux sphères conductrices de rayons R_1 et R_2 sont connectées par un fil conducteur de longueur ($L \gg R_1, R_2$). Une charge Q est placée sur les sphères.

Déterminer :

- a) la charge sur chaque sphère,
- b) le potentiel de chaque sphère, et
- c) le champ électrique à la surface de chaque sphère.

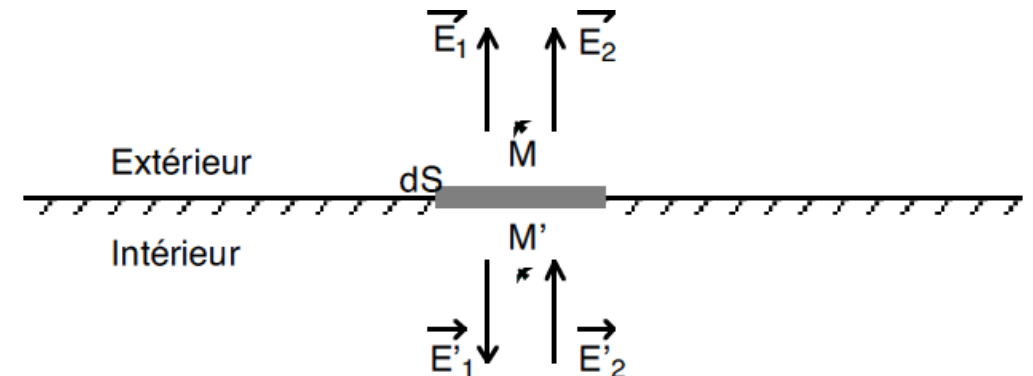
Exemple 2

Une charge est distribuée avec une densité de charge surfacique uniforme σ sur une feuille conductrice plane infinie.

Déterminez E à l'extérieur de la feuille.

3.2. Pression électrostatique

- Les charges à la surface d'un conducteur sont soumises à des forces répulsives de la part des autres charges.
- La **force exercée par unité de surface**, ou **pression** électrostatique, peut se calculer en multipliant le champ électrique moyen sur la surface du conducteur par la charge par unité de surface.
- Soient deux points M et M' infiniment proches de la surface d'un conducteur de densité surfacique σ , M situé à l'extérieur tandis que M' est situé à l'intérieur.



On a alors les trois propriétés suivantes :

- $\vec{E}_2(M) = \vec{E}_2'(M')$ car M et M' sont infiniment proches.
- $\vec{E}_2' = -\vec{E}_1'$ car le champ électrostatique à l'intérieur du conducteur est nul.
- $\vec{E}_1(M) = -\vec{E}_1'(M')$ car $\vec{E}_1$ est symétrique par rapport à dS , considérée comme un plan puisque M et M' peuvent être infiniment rapprochés.

Grâce à ces trois propriétés, on en déduit que $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$, c'est à dire que *la contribution de l'ensemble du conducteur est égale à celle de la charge située à proximité immédiate.*

➤ Comme le champ total vaut $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$ (théorème de Coulomb), on en déduit que le champ créé par l'ensemble du conducteur (à l'exclusion des charges situées en dS)

au voisinage du point M est $\boxed{\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n}}$.

Autrement dit, la force électrostatique $d\vec{F}$ subie par cette charge $dq = \sigma dS$ de la part de l'ensemble des autres charges du conducteur vaut : $d\vec{F} = dq \vec{E}_2 = \sigma dS \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \vec{n} dS$

Quel que soit le signe de σ , la force est normale et toujours dirigée vers l'extérieur du conducteur. Cette propriété est caractéristique d'une pression, force par unité de surface.

Ainsi, la pression électrostatique subie en tout point d'un conducteur vaut : $\boxed{P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$

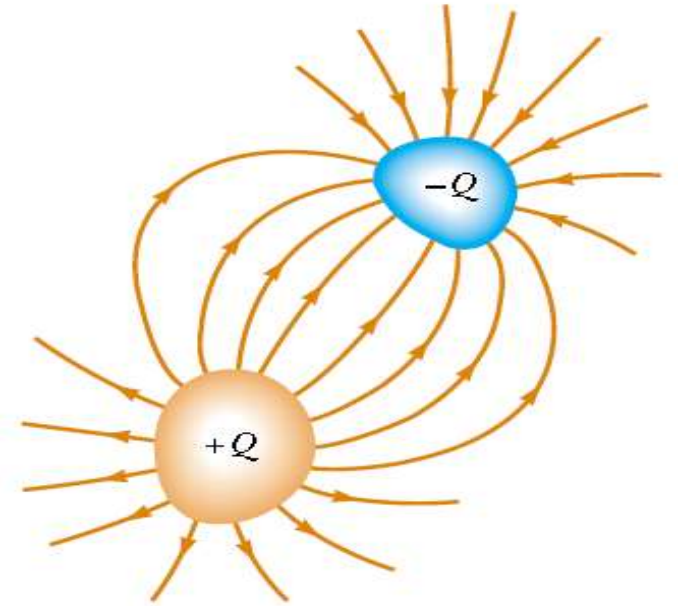
4. Les condensateurs



4. Les condensateurs

➤ Considérons deux conducteurs portant des charges de **même magnitude** et de **signe opposé**.

Une telle combinaison de deux conducteurs est appelée un **condensateur**.



➤ Un condensateur est constitué de **deux conducteurs**, appelés **armatures**, placés à proximité l'un de l'autre mais sans qu'il y ait contact entre eux, **séparés** par de l'air ou un autre matériau isolant.

➤ Dans les schémas de circuits électriques, on représente les condensateurs par : $\text{---}||\text{---}$

4.1. Capacité d'un condensateur

➤ La capacité C d'un condensateur est définie comme suite :

$$C = \frac{\text{la valeur absolue de la charge sur l'un ou l'autre conducteur}}{\text{la valeur absolue de la différence de potentiel entre les conducteurs}} \Leftrightarrow \boxed{C = \frac{Q}{\Delta V}}$$

➤ Notez que par définition, la capacité est toujours positive.

➤ La capacité C est toujours le produit ϵ_0 par une expression qui ne dépendant que de la géométrie du condensateur : *forme, dimension et position des armatures*.

➤ Par conséquent, la capacité est une mesure de la capacité d'un condensateur à stocker la charge. Parce que les charges positives et négatives sont séparées dans le système de deux conducteurs dans un condensateur, il y a une énergie potentielle électrique stockée dans le système.

➤ L'unité de la capacité est le Farad (F), ou $1 \text{ Farad} = 1 \text{ Coulomb} / 1 \text{ Volt}$. Pratiquement, le Farad est une unité très grande pour mesurer les capacités usuelles. On utilise souvent le microfarad ($1 \mu F = 10^{-6} F$), le nanofarad ($1 nF = 10^{-9} F$) et le picofarad ($1 pF = 10^{-12} F$)

4.2. Calcul de la capacité d'un condensateur

Nous pouvons déduire une expression pour la capacité d'un condensateur de la manière suivante :

- Calculer le champ en tout point intérieur au condensateur
- Déduire la différence de potentiel entre les condensateurs
- Effectuer le rapport $C = \frac{Q}{\Delta V}$

4.2.1. La capacité d'un condensateur plan

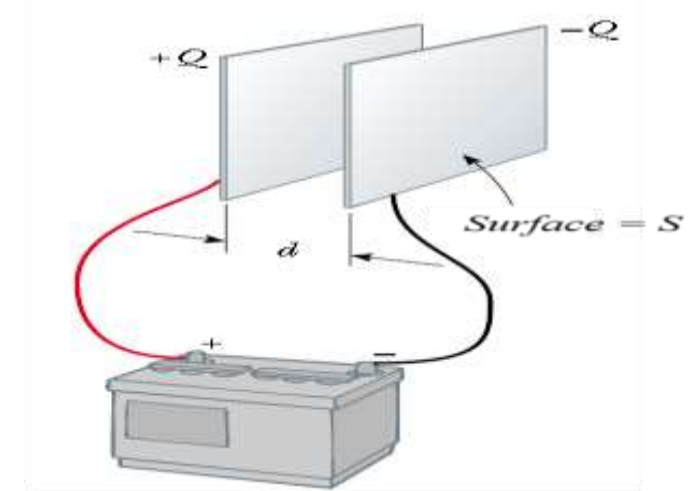
Le condensateur plan est un condensateur dans lequel les **armatures** sont deux plaques métalliques parallèles avec une surface identique **S** sont séparées par une distance **d** .

Une plaque porte une charge **Q** , et l'autre porte une charge **$-Q$** .

La densité surfacique de charge sur chaque plaque est **$\sigma = \frac{Q}{S}$**

Si les plaques sont très proches l'une de l'autre (comparativement à leur longueur et leur largeur), on peut supposer que le **champ électrique** est **uniforme entre les plaques** et nul ailleurs. D'après le résultat de l'exemple 2, la valeur du champ électrique entre les plaques

est la suivante : **$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S \epsilon_0}$**



Comme le champ entre les plaques est uniforme, l'amplitude de la différence de potentiel entre les plaques est égale à Ed ; par conséquent,

$$\Delta V = E d = \frac{Q d}{S \epsilon_0}$$

En substituant ce résultat dans l'équation $C = \frac{Q}{\Delta V}$, nous constatons que la capacité est

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q d}{S \epsilon_0}}$$

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

Autrement dit, la capacité d'un condensateur plan est **proportionnelle** à la **surface** de ses plaques et **inversement proportionnelle** à la **distance** entre les **plaques**

Exemple 3

Un condensateur plan dont les armatures sont distantes de 1 mm a une capacité de 1 F

Quelle est l'aire de chaque armature ?

Exemple 4

Calculer la capacité de deux plaques d'une surface de 4 cm^2 séparées par 1 mm .

Réponse

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})(0,0004 \text{ m}^2)}{0,001 \text{ m}}$$

$$C = 3,54 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 3,54 \text{ pF}$$

Exemple 5

Un condensateur à plaques parallèles est construit à partir de plaques d'une superficie de 888 m^2 chacune et d'une séparation de $1,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$. Le champ électrique maximal qui peut exister dans le condensateur avant que l'air ne s'ionise, provoquant des étincelles, est de $3,1 \cdot 10^6 \text{ V/m}$.

- (a) Quelle est la capacité de ce condensateur ?
- (b) Quelle est la tension maximale qui peut être appliquée à ce condensateur ?

4.2.2. La capacité d'un condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique est constitué d'un conducteur cylindrique plein de rayon a et de charge Q est coaxial à une coque cylindrique d'épaisseur négligeable, de rayon $b > a$ et de charge $-Q$.

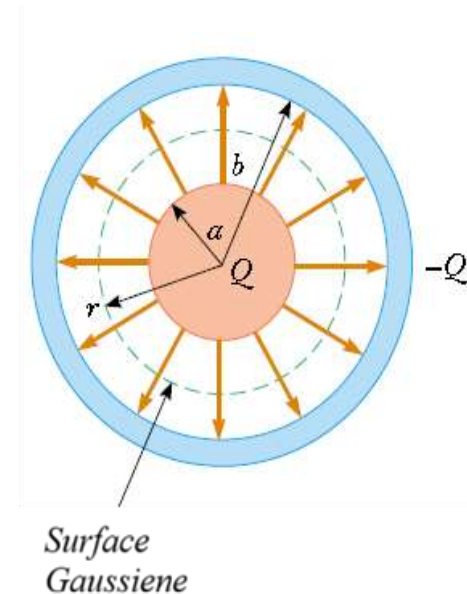
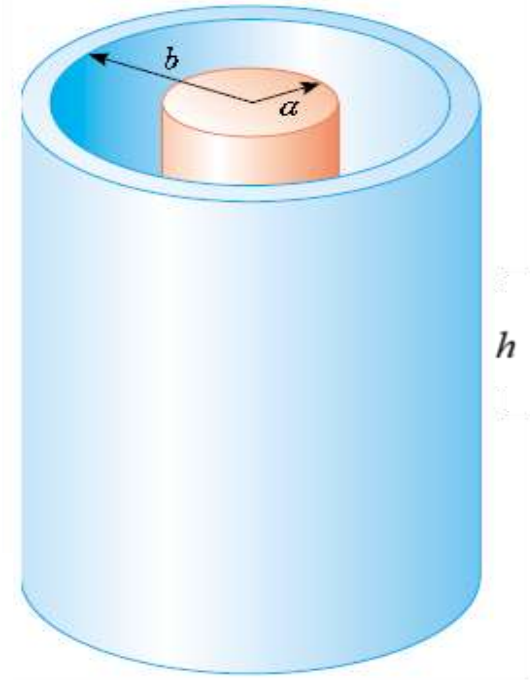
Entre ces deux armatures, le théorème de Gauss permet d'écrire :

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h} \vec{e}_r$$

Puisque : $E = -\frac{dV}{dr}$ alors $V_1 - V_2 = E \cdot dr$

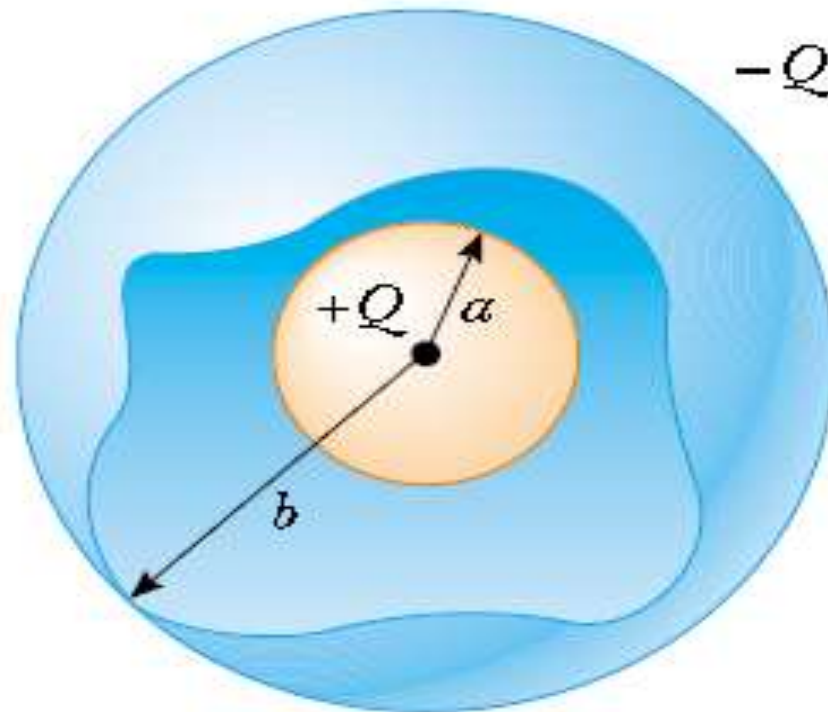
$$\text{On en déduit : } V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{b}{a}$$

$$\text{D'où la capacité : } C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \Leftrightarrow \boxed{C = \epsilon_0 \frac{2\pi h}{\ln \frac{b}{a}}}$$



4.2.3. La capacité d'un condensateur sphérique

Un condensateur sphérique est constitué d'une coque conductrice sphérique de rayon b et de charge $-Q$, concentrique à une sphère conductrice plus petite de rayon a et de charge Q .



D'après la loi de Gauss, seule la sphère intérieure contribue à ce champ. Ainsi, la différence de potentiel entre les sphères est

$$V_b - V_a = - \int_a^b E_r dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_a^b$$
$$V_b - V_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

L'amplitude de la différence de potentiel est

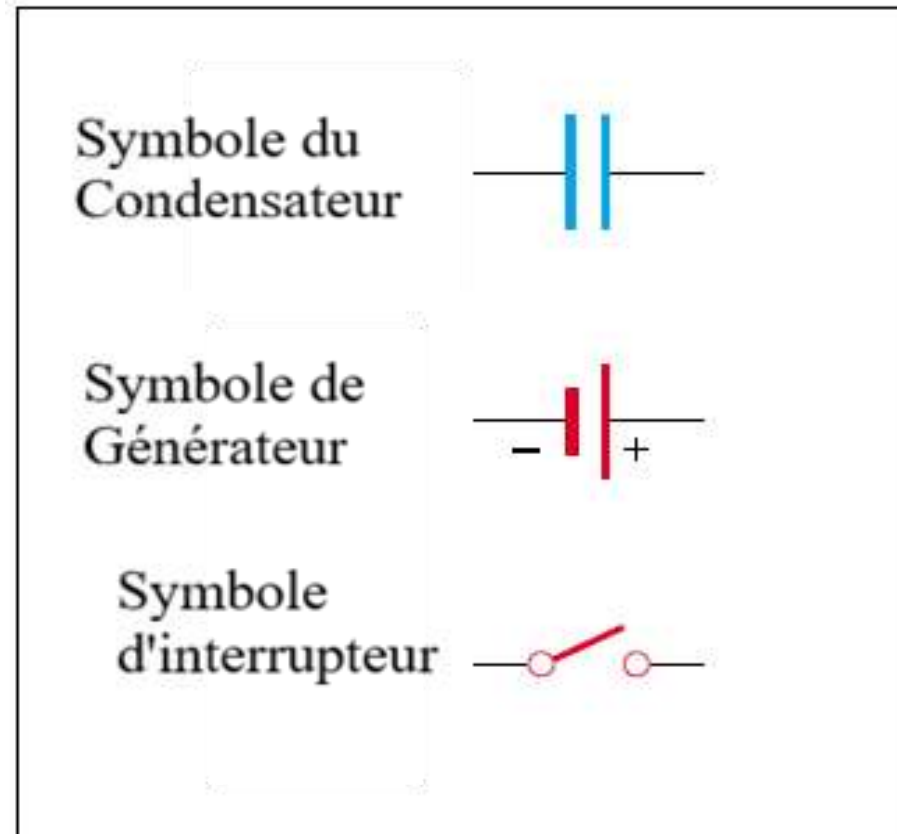
$$\Delta V = |V_b - V_a| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(b - a)}{ab}$$

et comme $C = \frac{Q}{\Delta V}$ il vient :

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{(b - a)}$$

5. Associations de condensateurs :

- Dans les circuits électriques, on associe souvent deux condensateurs ou plus.
- On peut calculer la **capacité équivalente** de certaines associations (en **parallèle** ou en **série**) à l'aide des méthodes décrites dans cette section.
- Pour étudier les circuits électriques, on utilise une représentation graphique simplifiée appelée schéma de circuit.



5.1. Association en parallèle :

- Deux condensateurs connectés comme illustré sur la figure (1) forment un montage parallèle.
- La figure (2) représente le schéma de ce montage.
 - ❖ Les armatures de gauche des condensateurs sont reliées par un fil conducteur à la borne positive du générateur et sont donc au même potentiel électrique que cette borne.
 - ❖ De même, les armatures de droite sont reliées à la borne négative et sont donc au même potentiel que cette borne.
- Ainsi, la différence de potentiel aux bornes de chaque condensateur est identique et égale à la différence de potentiel appliquée au générateur (Figure 2).

$$\begin{cases} Q_1 = C_1 \Delta V \\ Q_2 = C_2 \Delta V \end{cases} \quad (1)$$

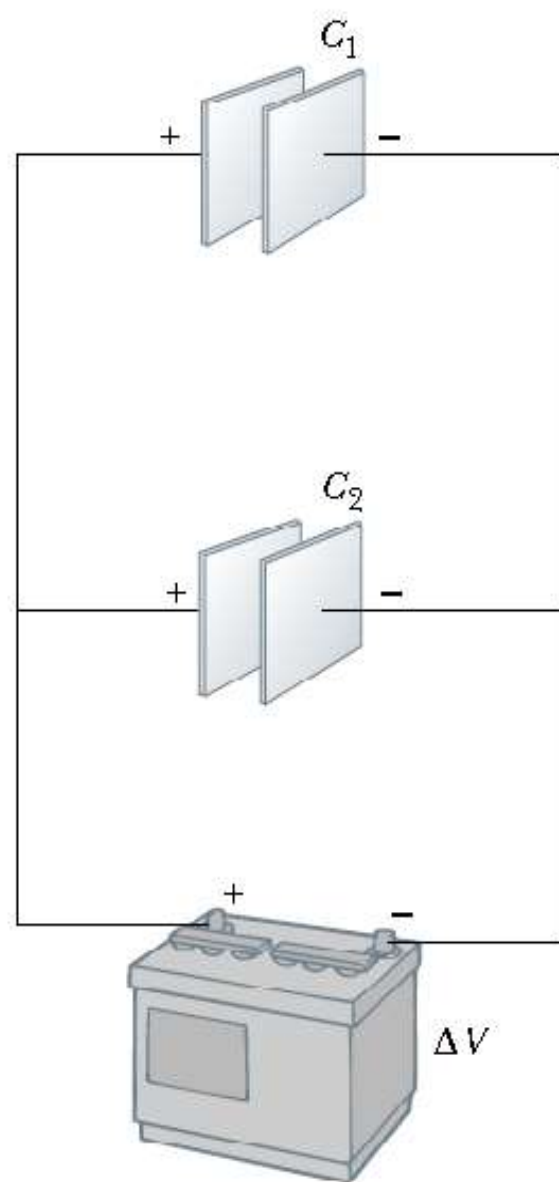


Figure 1

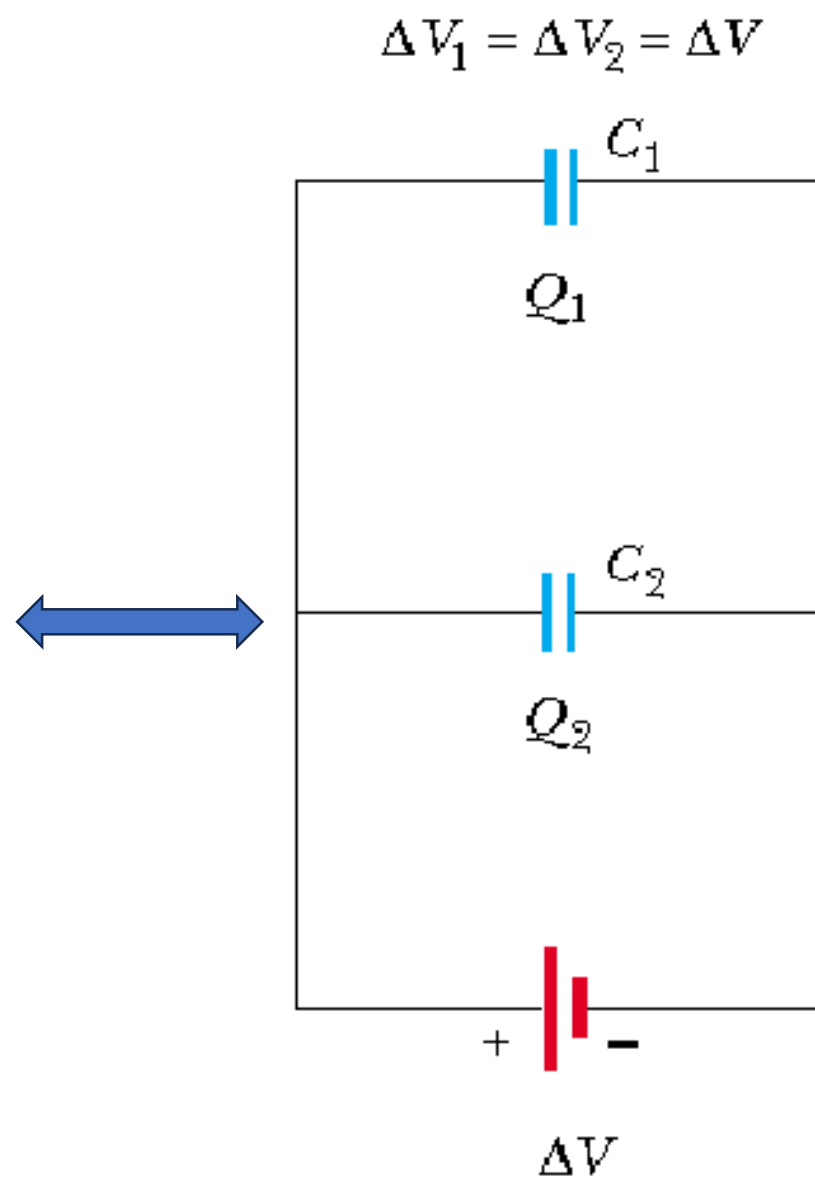


Figure 2

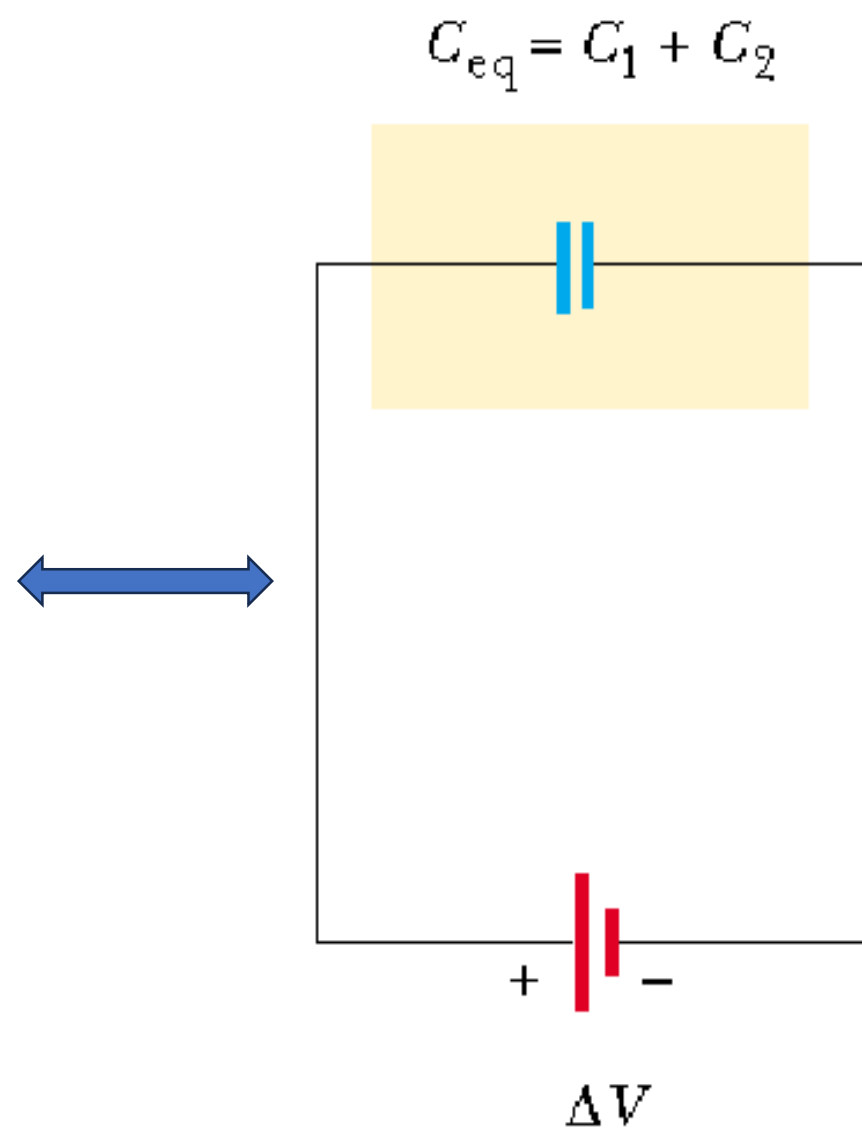


Figure 3

- Lorsqu'on connecte les condensateurs dans le circuit (figures 1, 2 et 3), des électrons sont transférés entre les fils et les armatures ;
- ce transfert charge positivement l'armature de gauche et négativement celle de droite.
- Le flux de charge **cesse** lorsque la tension aux bornes des condensateurs est égale à celle aux bornes du générateur.
- Les condensateurs atteignent leur charge maximale lorsque le flux cesse.
- Appelons Q_1 et Q_2 les charges maximales des deux condensateurs (figure 2).
- La charge totale Q stockée par les deux condensateurs est :

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (2)$$

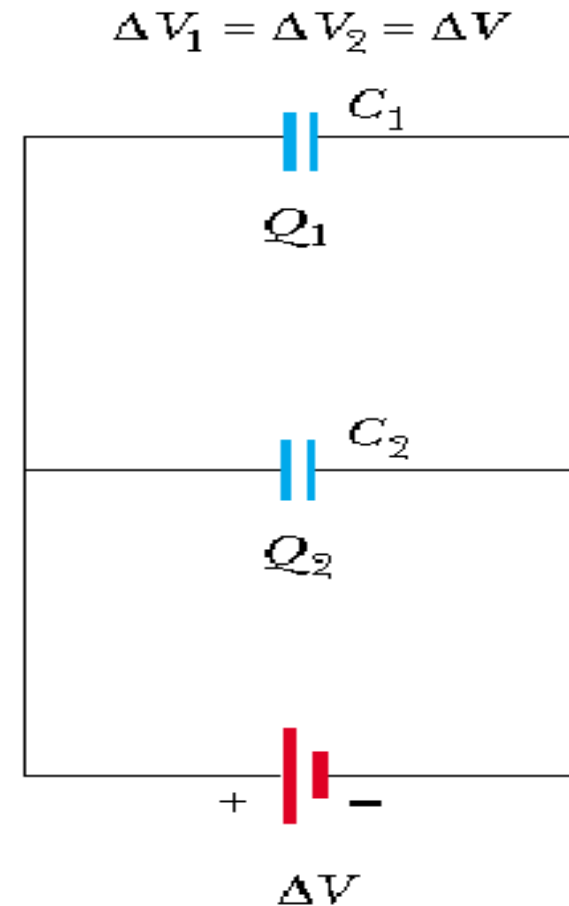


Figure 2

➤ Supposons que nous souhaitions remplacer ces deux condensateurs par un seul condensateur équivalent ayant une capacité C_{eq} , comme sur la figure 3.

➤ On peut voir sur cette figure que la tension aux bornes du condensateur équivalent est également ΔV car ce dernier est connecté directement aux bornes du générateur. Ainsi, pour le condensateur équivalent,

$$Q = C_{eq} \Delta V \quad (3)$$

➤ En substituant les relations (1, 2 et 3) à la charge, nous obtenons :

$$C_{eq} \Delta V = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V$$

D'où la capacité équivalente :

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (\text{montage parallèle}) \quad (4)$$

➤ Ainsi, *la capacité équivalente d'une combinaison parallèle de condensateurs est la somme algébrique des capacités individuelles et est supérieure à chacune des capacités individuelles.*

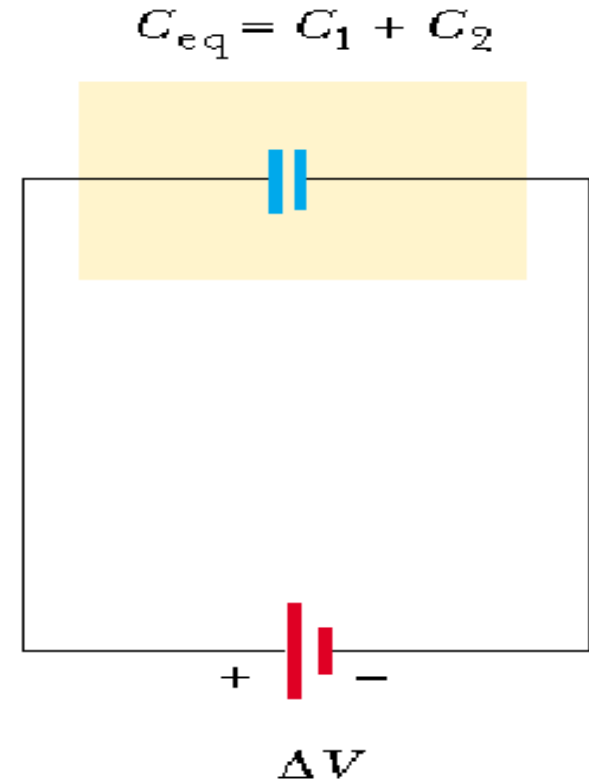


Figure 3

5.2. Association en série

- Deux condensateurs connectés comme indiqué sur la figure 4 et le schéma de circuit équivalent de la figure 5 sont connus sous le nom de combinaison en série de condensateurs.
- L'armature gauche du condensateur 1 et l'armature droite du condensateur 2 sont reliées aux bornes du générateur.
- Les deux autres armatures sont connectées l'une à l'autre et à rien d'autre; par conséquent, elles forment un conducteur isolé qui est initialement non chargé et doit continuer à avoir une charge nette nulle.
- Pour analyser ce montage, considérons d'abord les condensateurs initialement déchargés et observons ce qui se passe juste après la connexion du générateur.

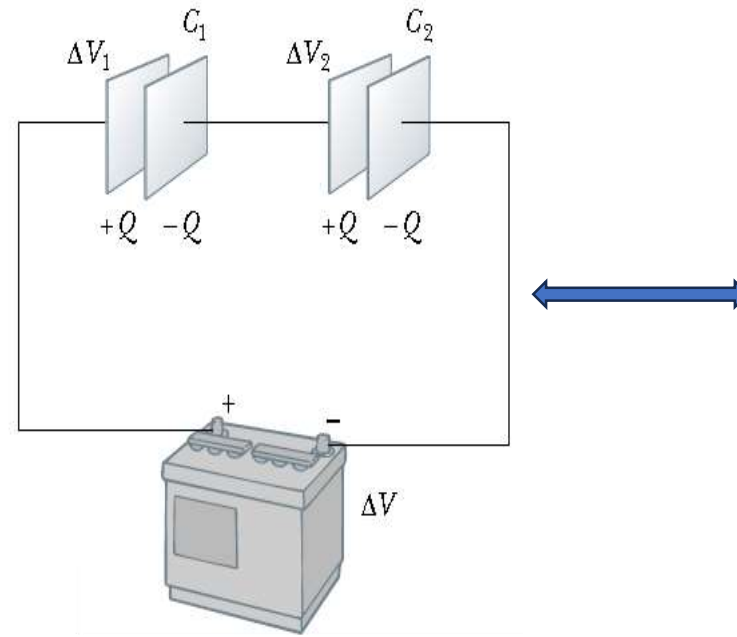


Figure 4

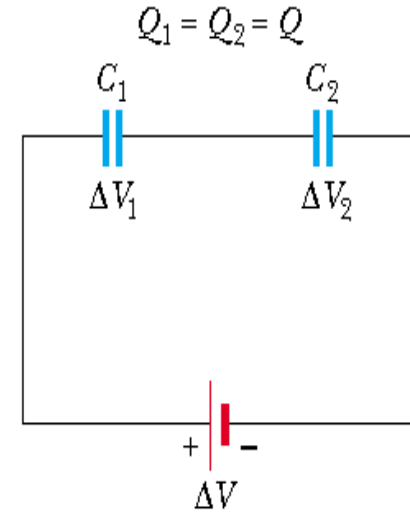


Figure 5

- Lorsque le générateur est connecté, des électrons sont transférés de l'armature gauche de C_1 vers l'armature droite de C_2 .
- À mesure que cette charge négative s'accumule sur l'armature droite de C_2 , une quantité équivalente de charge négative est extraite de l'armature gauche de C_2 , qui se retrouve donc avec un excès de charge positive.
- La charge négative quittant l'armature gauche de C_2 provoque une accumulation de charges négatives sur l'armature droite de C_1 . Par conséquent, toutes les armatures droites portent une charge $-Q$ et toutes les armatures gauches une charge $+Q$.
- Ainsi, *les charges des condensateurs connectés en série sont identiques*.
- D'après la figure 4, on constate que la tension ΔV aux bornes du générateur est répartie entre les deux condensateurs :
$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (5)$$
 où ΔV_1 et ΔV_2 sont les différences de potentiel aux bornes des condensateurs C_1 et C_2 , respectivement.

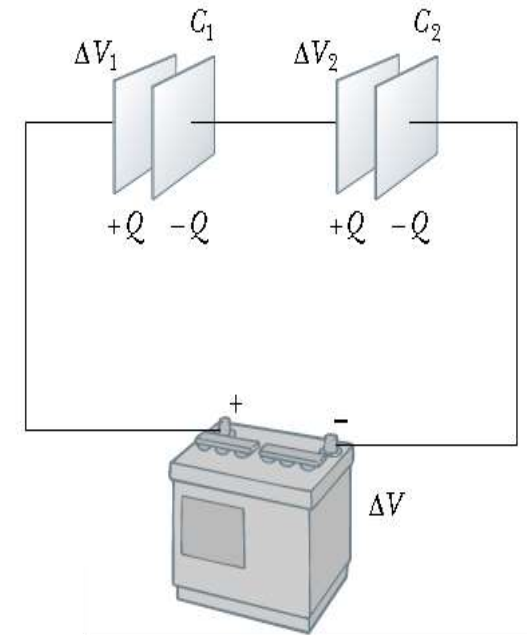


Figure 4

➤ En général, la différence de potentiel totale aux bornes d'un ensemble de condensateurs connectés en série est égale à la somme des différences de potentiel aux bornes de chaque condensateur.

➤ Supposons que le condensateur équivalent de la figure 6 même effet sur le circuit que l'ensemble en série lorsqu'il au générateur.

➤ Une fois complètement chargé, ce condensateur équivalent charge de $-Q$ sur son armature droite et une charge armature gauche.

➤ En appliquant la définition de la capacité au circuit de la figure 6, obtient :

$$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}} \quad (6)$$

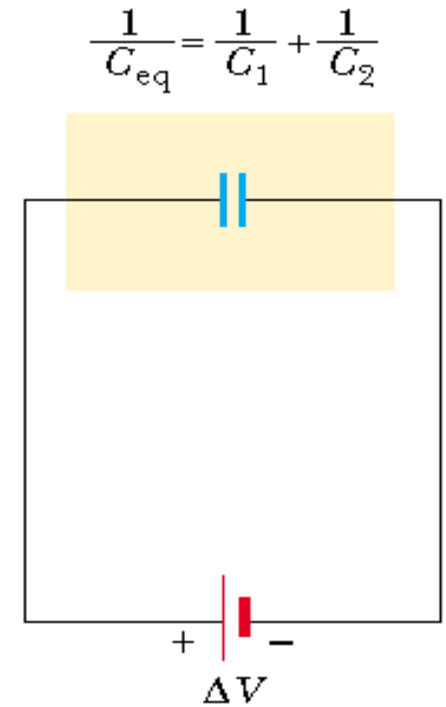


Figure 6

on

➤ Puisque nous pouvons appliquer l'expression (6) à chaque condensateur représenté sur la figure 5, les différences de potentiel à leurs bornes sont

$$\begin{cases} \Delta V_1 = \frac{Q}{C_1} \\ \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2} \end{cases} \quad (7)$$

➤ En substituant les expressions (7) dans l'équation (6), nous obtenons :

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Leftrightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (8) \quad \text{Montage en série}$$

➤ Cela montre que *l'inverse de la capacité équivalente est la somme algébrique des inverses des capacités individuelles et que la capacité équivalente d'un montage en série est toujours inférieure à toute capacité individuelle dans le montage.*

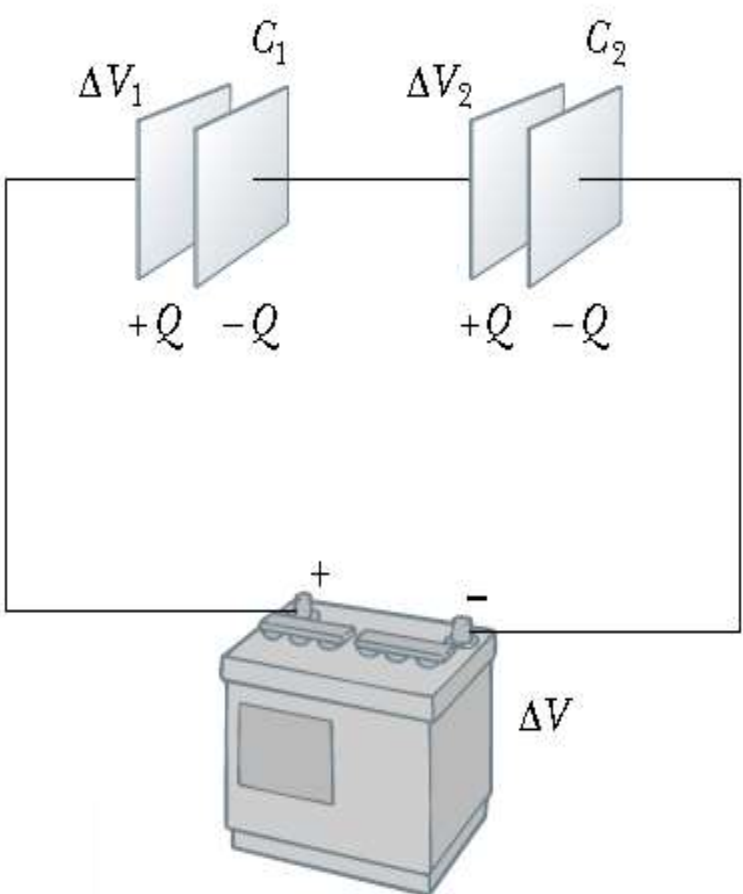


Figure 4

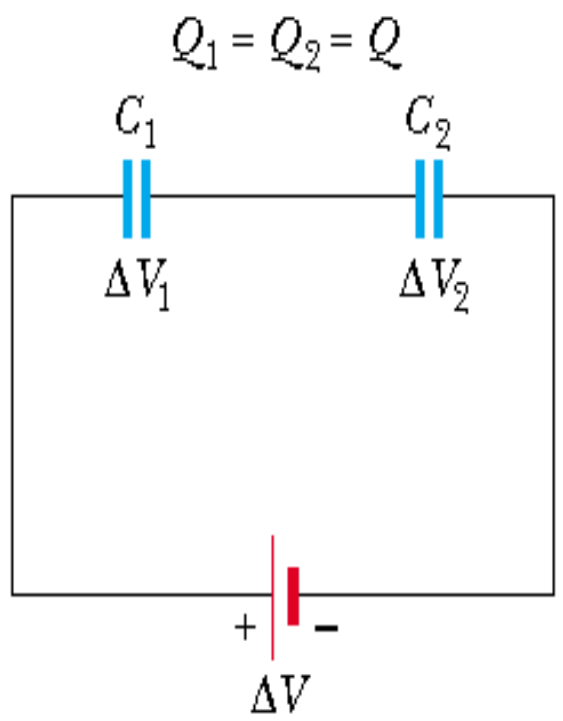


Figure 5

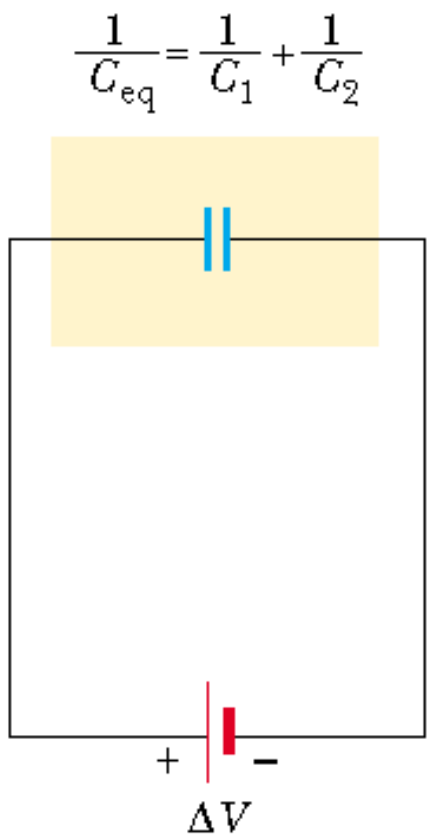
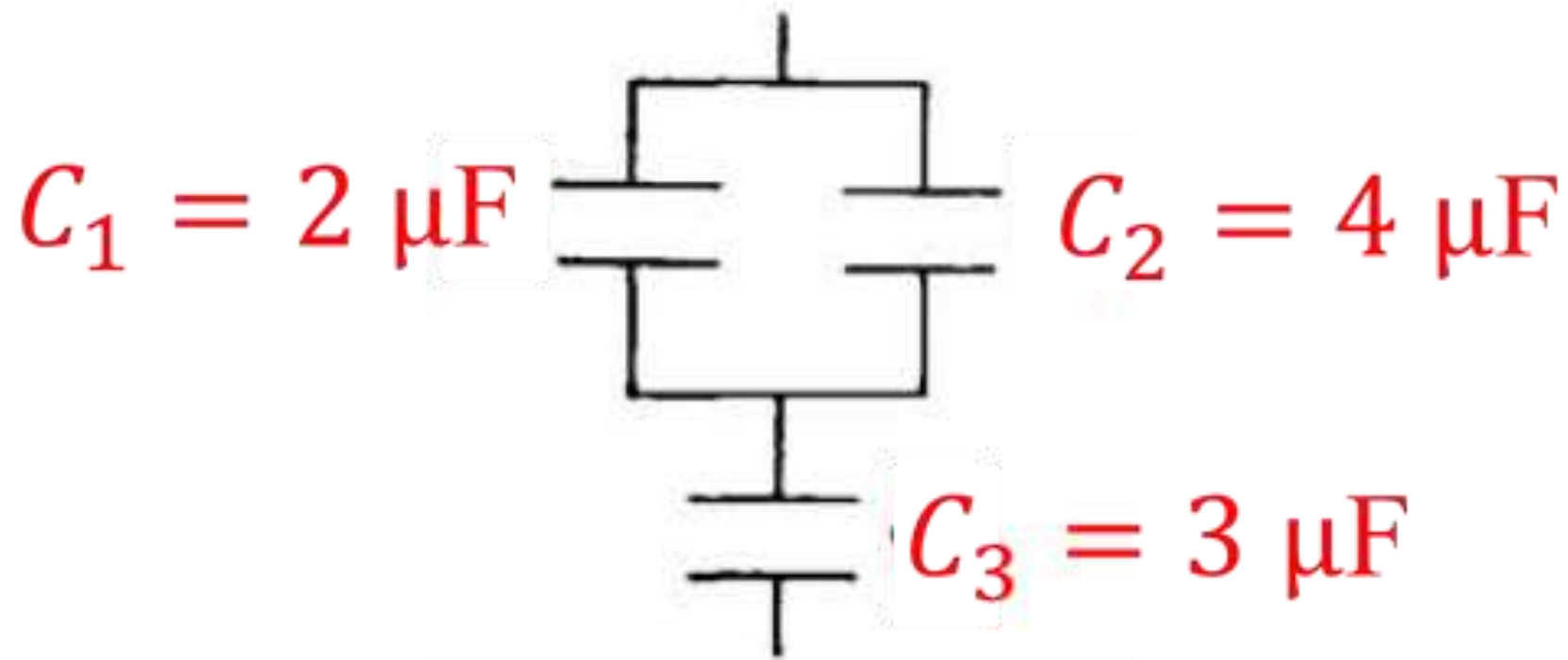


Figure 6

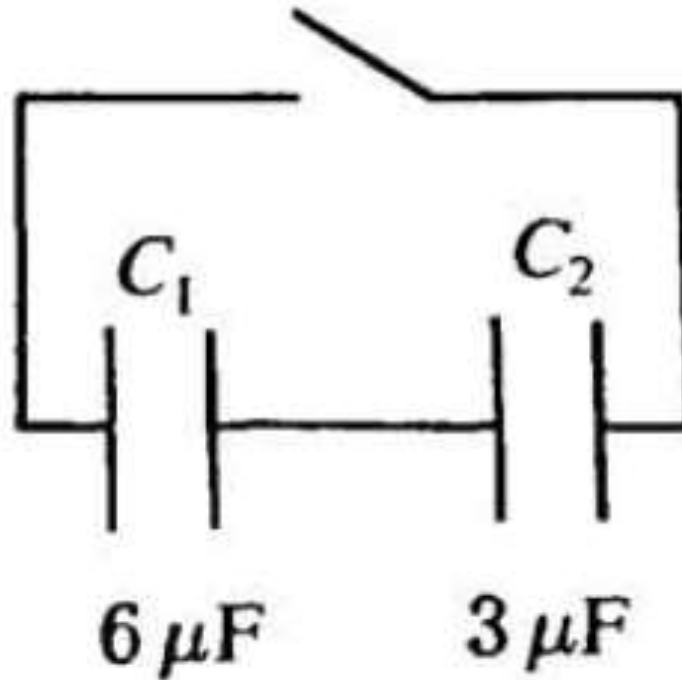
Exemple 6

Trouvez la capacité équivalente des condensateurs représentés ici :



Exemple 7

Un condensateur de $6\ \mu\text{F}$ est chargé par une batterie de $12\ \text{V}$ puis déconnecté. Il est ensuite connecté à un condensateur de $3\ \mu\text{F}$ qui a été initialement déchargé, comme indiqué ici :



Quelle est la différence de potentiel finale à travers chaque condensateur ?

Exemple 8

Trouvez la capacité équivalente entre *a* et *b* pour le montage de condensateurs montrée dans la Figure (7). Toutes les capacités sont en microfarads.

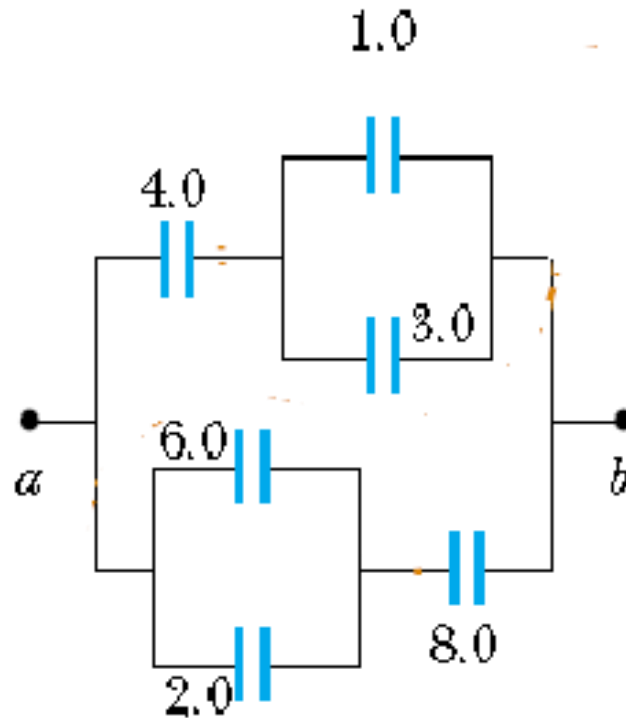


Figure 7

6. Énergie stockée dans un condensateur chargé

- Supposons que q représente la charge du condensateur à un instant donné pendant processus de charge.
- Au même instant, la différence de potentiel aux bornes du condensateur est $\Delta V = \frac{q}{C}$.
- Le travail nécessaire pour transférer un incrément de charge dq de l'armature portant la charge $-q$ à l'armature portant la charge $+q$ (qui est au potentiel électrique le plus élevé) est :

$$dW = \Delta V \, dq = \frac{q}{C} \, dq$$

- Le travail total nécessaire pour charger le condensateur de $q = 0$ à une charge finale $q = Q$ est : $W = \int_0^Q \frac{q}{C} \, dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q \, dq = \frac{Q^2}{2C}$

$$W = \frac{Q^2}{2C} \quad (9)$$

➤ Le travail effectué pour charger le condensateur se traduit par une énergie potentielle électrique W stockée dans celui-ci. À l'aide de l'équation $C = \frac{Q}{\Delta V}$, on peut exprimer l'énergie potentielle stockée dans un condensateur chargé sous les formes suivantes :

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \quad (10)$$

- Ce résultat s'applique à tout condensateur, quelle que soit sa géométrie.
- On constate que, pour une capacité donnée, l'énergie stockée augmente avec la charge et la différence de potentiel.
- En pratique, l'énergie (ou la charge) maximale stockable est limitée car, pour une valeur de ΔV suffisamment élevée, une décharge se produit entre les armatures. C'est pourquoi les condensateurs sont généralement caractérisés par une tension maximale de fonctionnement.

Exemple 9

Deux condensateurs, $C_1 = 5 \mu\text{F}$ et $C_2 = 8 \mu\text{F}$, sont connectés **en série** aux bornes d'un générateur de **9 V**.

Combien d'énergie stockent-ils ?