

Matrices et déterminants

1. Définition et notations

Définition : Une matrice $A = (a_{ij})$ avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$; $m, n \in \mathbb{N}$ est un tableau à m lignes et n colonnes à coefficients dans K de la forme :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- i est l'indice de la ligne
- j est l'indice de la colonne
- Les éléments a_{ij} sont appelés termes de la matrice A . Ils appartiennent à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- La matrice à m lignes et n colonnes est dite matrice rectangulaire d'ordre $m \times n$ (ou matrice (m, n)). L'ensemble des matrices d'ordre $m \times n$ est noté par $M_{m,n}(K)$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -10 \\ 1 & \frac{1}{3} & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice $(2,3)$, $A \in M_{2,3}(K)$.

2. Matrices particulières

2.1 Matrice colonne

C'est une matrice qui a une seule colonne. On l'appelle aussi vecteur colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K)$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

2.2 Matrice ligne

C'est une matrice qui a une seule ligne. On l'appelle aussi vecteur ligne

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M_{1,n}(K)$$

Exemple : $A = \left(1, -\sqrt{7}, 0, \frac{1}{3}\right)$

2.3 Matrice nulle

C'est une matrice dont tous les termes sont nuls autrement dit, $a_{ij} = 0 \forall i = 1, \dots, m$ et $\forall j = 1, \dots, n$. On la note par $0_{m,n}$.

Exemple : $0_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $0_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.4 Matrice carrée :

C'est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes ($m = n$). Au lieu de dire matrice (n,n) , on dit matrice d'ordre n . L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $M_n(K)$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

2.4.1 Diagonale principale et diagonale secondaire

Soit la matrice carrée d'ordre n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La diagonale principale est la suite des éléments $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

On note $gA = (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

- a_{ij} est sur la diagonale principale si $i = j$
- a_{ij} est au dessus de la diagonale principale si $i < j$

- a_{ij} est dessous de la diagonale principale si $i > j$
- a_{ij} est sur la diagonale secondaire si $i + j = n + 1$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{diag}A = (1, -1/2, 5)$$

7, 2, 6 sont au dessous de la diagonale principale

2, 0, 3 sont au dessus de la diagonale principale

$0, -\frac{1}{2}, 2$ sont sur la diagonale secondaire

2.4.2 Trace d'une matrice carrée

La trace d'une matrice carrée A est la somme des éléments de la diagonale principale. On la note par $\text{tr}A$ et on a : $\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ où n est l'ordre de la matrice A .

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}A = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = \frac{11}{2}$$

2.4.3 Matrice triangulaire supérieure

Une matrice carrée d'ordre n est dite triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$: Tous les éléments qui se trouvent au dessous de la diagonale principale sont nuls.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2.4.4 Matrice triangulaire inférieure

Une matrice carrée d'ordre n est dite triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$: Tous les éléments qui se trouvent au dessus la diagonale principale sont nuls.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

2.4.5 Matrice diagonale

Une matrice carrée d'ordre n est dite diagonale si $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2.4.6 Matrice identité

Une matrice carrée d'ordre n est dite matrice unité ou identité si elle diagonale et tous les termes de la diagonale principale sont égaux à 1. On la note par I_n .

Exemple :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4.7 Matrice scalaire

C'est une matrice diagonale dont tous les éléments de la diagonale principale sont égaux.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \in K$$

Remarque : La matrice identité est une matrice scalaire.

2.4.8 Matrice symétrique

Une matrice carrée est dite symétrique si $a_{ij} = a_{ji} \ \forall i, j$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 11 \\ -2 & 6 & 5 \\ 11 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4.9 Matrice antisymétrique

Une matrice carrée est dite antisymétrique si $a_{ij} = -a_{ji} \ \forall i, j$ et $a_{ii} = 0 \ \forall i$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & -13 \\ -8 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice nulle est symétrique et antisymétrique en même temps.

3. Opérations sur les matrices

3.1 Egalité de deux matrices

Deux matrices A et B sont égales (on note $A = B$) si et seulement si elles ont le même nombre de lignes, le même nombre de colonnes et les coefficients à la même position sont égaux. Autrement dit, si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ alors,

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ et } \forall j = 1, \dots, n$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 9 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & \\ -6 & 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & \\ 0 & 12 & -5 \\ 7 & -13 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2 Addition des matrices

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ deux matrices à coefficients dans K . La somme de A et B notée $A + B$ est la matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est la somme des coefficients de même position de A et de B .

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 11 \\ 13 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$
$$A + B = \begin{pmatrix} 7+1 & -3+5 & 6+11 \\ 2+13 & 0+9 & 10+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 17 \\ 15 & 9 & 18 \end{pmatrix}$$

Proposition : Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ sont trois matrices à coefficients dans K alors,

- L'addition est associative : $A + (B + C) = (A + B) + C$
- La matrice nulle à m lignes et n colonnes est un élément neutre pour l'addition :
 $A + 0 = 0 + A = A$
- Toute matrice A admet un symétrique pour l'addition :
En posant $-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ on aura $A + (-A) = (-A) + A = 0$
- L'addition est commutative : $A + B = B + A$

Remarque : On note $A - B$ la somme de A et du symétrique de B c'est-à-dire :
 $A - B = A + (-B)$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-5 & 6-7 \\ 0-4 & 10-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

3.3 Multiplication d'une matrice par un scalaire de K

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $\lambda \in K$. On appelle produit de λ par A , la matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est obtenu en multipliant chaque coefficient de A par λ . On note $\lambda.A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} \pi & 0 & \frac{1}{3} \\ \sqrt{3} & -15 & 9 \end{pmatrix}$; $\lambda = 4$

$$\lambda.A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \pi & 0 & \frac{1}{3} \\ \sqrt{3} & -15 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.\pi & 4.0 & 4.\frac{1}{3} \\ 4.\sqrt{3} & 4.(-15) & 4.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\pi & 0 & \frac{4}{3} \\ 4\sqrt{3} & -60 & 36 \end{pmatrix}$$

Théorème : Soient $A, B \in M_{m,n}(K)$ et $\lambda, \mu \in K$ alors on a :

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

$$1.A = A$$

3.4 Produit de deux matrices

3.4.1 Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soient $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M_{1,n}(K)$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$ le produit de A par

B est la matrice d'ordre 1×1 dont le coefficient est donné par :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Exemple : $(5, 1, -2) \times \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \times 8 + 1 \times 0 + (-2) \times 4 = 32$

3.4.2 Produit d'une matrice par une matrice colonne

Soient $A \in M_{m,n}(K)$ et $B \in M_{n,1}(K)$ une matrice colonne. Le produit de A par B est la matrice $A \times B$ d'ordre $(n, 1)$ dont le i -ème terme est obtenu en multipliant la ligne i de A par la colonne B .

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \\ -8 & 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + (-2) \times 2 + 7 \times 3 \\ 1 \times 1 + 1 \times 2 + 4 \times 3 \\ (-8) \times 1 + 3 \times 2 + 5 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 45 \end{pmatrix}$$

3.4.3 Produit de deux matrices

Soient $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ et $B = (b_{jk}) \in M_{n,p}(K)$. Le produit de A par B (dans cet ordre) est la matrice $C = (c_{ik}) \in M_{m,p}(K)$ tel que $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$

Remarque : Pour que le produit $A \cdot B$ soit possible, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B :

$$A(m, n) \times B(n, p) = C(m, p)$$

Le produit se fait toujours « ligne par colonne »

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 4 & 1 \times 0 + 2 \times 3 + 3 \times 1 \\ 4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 4 & 4 \times 0 + 5 \times 3 + 6 \times 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 38 & 21 \end{pmatrix}; \quad B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 14 & 19 & 24 \\ 8 & 13 & 18 \end{pmatrix}; \quad A \times C = \begin{pmatrix} 16 & 12 & 17 \\ 37 & 30 & 41 \end{pmatrix};$$

$C \times A$ n'est pas défini.

Propriétés : Soient A, B et C trois matrices. Lorsque le produit est bien défini, on a :

- $A(B + C) = AB + AC$
- $(AB)C = A(BC)$
- En général, $AB \neq BA$

3.5 Inversion des matrices

Soit A une matrice carrée d'ordre n . On appelle l'inverse de A la matrice notée A^{-1} d'ordre n telle que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, déterminons A^{-1} .

On pose $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A.A^{-1} = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 5c = 1 & (1) \\ -2a + 3c = 0 & (2) \\ b + 5d = 0 & (3) \\ -2b + 3d = 1 & (4) \end{cases}$$

La résolution du système d'équations nous donne :

$$a = \frac{3}{13}, \quad b = \frac{-5}{13}, \quad c = \frac{2}{13}, \quad d = \frac{1}{13}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

Proposition : Soit A une matrice d'ordre n inversible, alors A^{-1} est aussi une matrice inversible d'ordre n et on a : $(A^{-1})^{-1} = A$.

Proposition : Soient A et B deux matrices d'ordre n inversibles alors, $A.B$ est une matrice inversible d'ordre n et on a : $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

3.6 Transposée d'une matrice

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$. On appelle transposée de A la matrice notée A^t (ou A^T) définie par $A^t = (a_{ji}) \in M_{n,m}(K)$ obtenue de A en changeant les lignes en colonnes.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Remarque :

- Une matrice carrée A est symétrique si $A^t = A$
- Une matrice carrée A est antisymétrique si $A^t = -A$

Propriétés :

- $\forall A \in M_{m,n}(K), (A^t)^t = A$
- $\forall A, B \in M_{m,n}(K) : (A + B)^t = A^t + B^t$
- $\forall A \in M_{m,n}(K), \forall \alpha \in K : (\alpha A)^t = \alpha A^t$
- $\forall A \in M_{m,n}(K), \forall B \in M_{n,p}(K) : (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- $\forall A \in M_n(K) \text{ inversible}, (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

4. Déterminants

Nous omettrons de donner la définition formelle du déterminant qui impliquerait des notions de permutations. Nous allons plutôt nous intéresser au calcul de celui-ci. Par conséquent, nous nous contenterons de dire que le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K , noté $\det A$ ou $|A|$, est un scalaire de K défini de la façon suivante :

4.1 Déterminant d'ordre 1 et 2

- Pour $n = 1$, $A = (a_{11})$ alors, $\det A = a_{11}$
- Pour $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ alors, $\det A = a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ alors,

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = (3 \times 10) - (7 \times (-5)) = 65$$

4.2 Déterminant d'ordre 3

4.2.1 Méthode de Sarrus

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

La méthode consiste à recopier les deux premières lignes (respectivement les deux premières colonnes) de A en dessous de la troisième ligne (respectivement après la troisième colonne). Dans ce cas, le déterminant de A est égal à la somme des produits des éléments des diagonales descendantes diminué par la somme des produits des éléments des diagonales ascendantes. Ainsi,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

Ou bien

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

Ou bien

Attention : la méthode de Sarrus s'applique uniquement au calcul du déterminant d'une matrice d'ordre 3.

On affecte, alternativement, aux éléments de la matrice des signes positives et négatifs en commençant par l'élément a_{11} auquel on associe un signe positif. Par la suite on choisit une ligne ou une colonne pour calculer le déterminant.

On remarque que :

- si $i + j$ est pair, le terme a_{ij} est affecté d'un signe positif
- si $i + j$ est impair, le terme a_{ij} est affecté d'un signe négatif

Dans ce cas, les signes $+$ et $-$ peuvent être remplacés par $(-1)^{i+j}$ alors,

Si on choisit par exemple la première ligne, on aura

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^- & a_{13}^+ \\ a_{21}^- & a_{22}^+ & a_{23}^- \\ a_{31}^+ & a_{32}^- & a_{33}^+ \end{vmatrix} = +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ou bien

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Si on choisit la troisième colonne, on aura :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^- & a_{13}^+ \\ a_{21}^- & a_{22}^+ & a_{23}^- \\ a_{31}^+ & a_{32}^- & a_{33}^+ \end{vmatrix} = +a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Ou bien

$$\det A = (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Remarque : La valeur du déterminant est la même quelque soit la ligne ou la colonne. Par conséquent, il est conseillé de choisir une ligne ou une colonne qui contient le plus de zéros afin de réduire les calculs.

Exemple : Reprenons la matrice précédente $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

Etant donné que le terme a_{12} est nul, il est préférable de choisir la première ligne ou la deuxième colonne

- Par rapport à la première ligne on obtient :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 2 \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} (-3) \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -239$$

4.3 Méthode pratique pour le calcul du déterminant d'ordre n

Il s'agit de la méthode dite des cofacteurs qui généralise le principe de développement par rapport à une ligne ou une colonne. Par conséquent, cette méthode s'applique aussi bien à l'ordre n qu'à l'ordre deux ou trois.

Avant de donner la formule générale du déterminant d'ordre n , nous définissons d'abord le mineur d'indices i et j de la matrice $A = (a_{ij})$ ainsi que le cofacteur associé à l'élément a_{ij} .

Soit donc A une matrice carrée d'ordre , $n \geq 2$

- Le mineur d'indices i et j de la matrice A est le déterminant noté M_{ij} de la matrice réduite A_{ij} obtenue de A en supprimant la i -ème ligne et la j -ième colonne : $M_{ij} = \det A_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$.
- Le cofacteur de l'élément a_{ij} est le nombre c_{ij} défini par $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ où M_{ij} est le mineur d'indices i et j de la matrice A .

Remarque : Le mineur et le cofacteur ne diffèrent que par le signe $(-1)^{i+j}$.

- Si $i + j$ est pair alors $c_{ij} = M_{ij}$
- Si $i + j$ est impair alors, $c_{ij} = -M_{ij}$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l} M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -23 \\ M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 11 \\ M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} c_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -23 \\ c_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -11 \\ c_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \end{array} \right.$$

Compte tenu des deux définitions précédentes, nous pouvons donner deux écritures du déterminant d'ordre n :

- Développement par rapport à une ligne (la i -ème)

$$\det A = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \dots + a_{in}c_{in}$$

- Développement par rapport à une colonne (la j -ème)

$$\det A = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \dots + a_{nj}c_{nj}$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

- Si nous choisissons la 3^{ème} ligne ($i = 3$)

$$\det A = a_{31}c_{31} + a_{32}c_{32} + a_{33}c_{33}$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -3; \quad c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -27$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\det A = 7 \times (-3) + 8 \times (-27) + 1 \times (-2) = -239$$

- Si nous choisissons la 1^{ère} ligne ($i = 1$), il n'est pas nécessaire de calculer c_{12}

car a_{12} est nul. Dans ce cas, $\det A = a_{11}c_{11} + a_{13}c_{13}$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -49 \quad ; \quad c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 47$$

$$\det A = 2 \times (-49) + (-3) \times 47 = -239$$

4.4 Propriétés des déterminants

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K

1. Si deux lignes (ou deux colonnes) de la matrice A sont proportionnelles (ou identiques), son déterminant est nul.

Exemple :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{la 3^{ème} colonne est proportionnelle à la 1^{ère}})$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \\ 12 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{la 3^{ème} ligne est proportionnelle à la 2^{ème}})$$

2. Si la matrice A a une ligne (ou une colonne) nulle, son déterminant est nul.

Exemple :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 10 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 12 \\ -15 & 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \det B = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. Si l'une des lignes (ou des colonnes) de A est une combinaison linéaire des autres lignes (ou colonnes), son déterminant est nul.

Exemple :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 13 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \times (1) - 2 \times (2) \\ 5 & 1 & 3 \times (5) - 2 \times (1) \\ 3 & 0 & 3 \times (3) - 2 \times (0) \end{vmatrix} = 0$$

On remarque que la 3^{ème} colonne est égale au triple de la 1^{ère} colonne – le double de la 2^{ème} colonne donc $\det A = 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & -7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -2 + 4 & -7 + 5 & 3 + 1 \\ 4 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

On remarque que la 2^{ème} ligne est la somme de 1^{ère} ligne et de la 3^{ème} ligne donc $\det A = 0$

4. Si l'on permute deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant, ce dernier change de signe.

Exemple : Soit $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -160$

- Si l'on permute, la 1^{ère} et la 3^{ème} ligne de la matrice A on obtient

$$\det B = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & -2 \\ 1 & 9 & -3 \end{vmatrix} = 160 = -\det A$$

- Si l'on permute, la 1^{ère} et la 2^{ème} colonne de la matrice A on obtient

$$\det C = \begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 6 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 160 = -\det A$$

5. Si aux éléments d'une ligne (ou colonne) on ajoute k fois les éléments correspondants d'une autre ligne (ou colonne), la valeur du déterminant ne change pas. Cette propriété est utilisée pour simplifier le calcul d'un déterminant en faisant apparaître des zéros.

Exemple :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -7 & 10 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \\ -8 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 10 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \\ -8 + 4(2) & 4 + 4(-1) & 5 + 4(1) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -7 & 10 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} -7 & 10 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9(7 - 20) = -117 \end{aligned}$$

(on ajoute à la 3^{ème} ligne le quadruple de la 2^{ème} ligne)

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 + 3(-3) & -3 \\ 4 & 6 + 3(-2) & -2 \\ -3 & 1 + 3(5) & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 16 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -16 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -16(-2 + 12) = -160 \end{aligned}$$

(on ajoute à la 2^{ème} colonne le triple de la 3^{ème} colonne)

6. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments de la diagonale principale. En particulier, $\det I_n = 1$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \times 5 \times (-3) = -75$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 10 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10 \times 7 \times 2 = 140$$

7. Si chaque élément d'une ligne (ou colonne) de A est multiplié par un scalaire $\lambda \in K$ alors, le déterminant est multiplié par λ . Par conséquent, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$, $\lambda \in K$

Exemple : $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 8 & 12 & -4 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 2(4) & 2(6) & 2(-2) \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

La 2^{ème} ligne de B est multipliée par 2 alors, $\det B = 2 \times \det A$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 4 & 6 & 6 \\ -3 & 1 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & (-3)(-3) \\ 4 & 6 & (-3)(-2) \\ -3 & 1 & (-3)(5) \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

La 3^{ème} colonne de C est multipliée par (-3) alors, $\det C = (-3) \times \det A$

8. $\det A^t = \det A$
9. $\det(A \times B) = \det A \times \det B$
10. Si A est inversible alors $\det A \neq 0$ et on a $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

4.5 Application des déterminants au calcul de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre n ($n \geq 2$)

5.4.1 Définitions

Soit A une matrice carrée d'ordre n .

- On appelle matrice des cofacteurs ou comatrice de A , la matrice carrée d'ordre n formée par tous les cofacteurs $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ des éléments a_{ij} de la matrice A . On la note par $comA$.
- La transposée de la comatrice de A est appelée matrice adjointe de A . On la note par A^* ou $adjA$ et on $(comA)^t = A^*$

On peut facilement vérifier que :

$$A \times A^* = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix}$$

$$A \times A^* = \det A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \det A \times I_n$$

Par conséquent, si $\det A \neq 0$, A est inversible et son inverse A^{-1} est égale à :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

Le développement par rapport à la 1ère ligne nous donne :

$$\det A = 1 \times (-8) + 3 \times (-24) + 1 \times 16 = -64$$

On a $\det A \neq 0$ donc A est inversible

$$\text{com} A = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -24 & 16 \\ -16 & 8 & -8 \\ 8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^* = (\text{com} A)^t = \begin{pmatrix} -8 & -16 & 8 \\ -24 & 8 & 0 \\ 16 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{-1}{64} \begin{pmatrix} -8 & -16 & 8 \\ -24 & 8 & 0 \\ 16 & -8 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$