

CHAPITRE 2 : Fonctions Élémentaires

2.1 Fonctions homographiques

Fonctions rationnelles : Une fonction rationnelle est une fonction complexe de la forme $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont deux polynômes avec $Q(z) \neq 0$.

Le cas particulier $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ où $ad - bc \neq 0$ est appelée fonction homographique.

2.2 Fonctions exponentielle

La fonction exponentielle est définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C} : e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

2.2.1 Formule d'Euler :

Si on considère le cas où $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$, alors e^{iy} s'écrit sous une forme très intéressante :

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n \geq 0} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + \frac{(iy)}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots + \frac{(iy)^n}{n!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) + i \left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \dots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) \end{aligned}$$

Et en utilisant le développement en série entière des fonctions sinus et cosinus, on obtient la fameuse formule d'Euler d'où :

$$\forall y \in \mathbb{R} : e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

Donc la fonction exponentielle peut être écrite comme :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

D'où on a $\operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y = P(x, y)$ et $\operatorname{Im}(e^z) = e^x \sin y = Q(x, y)$

On peut vérifier les conditions de Cauchy Riemann, et on trouve que la dérivée de la fonction exponentielle est :

$$\forall z \in \mathbb{C} : (e^z)' = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x (\cos y + i \sin y) = e^{x+iy} = e^z$$

2.3 Fonctions Hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont définies par les relations suivantes :

- **sinus hyperbolique** : $shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
- **cosinus hyperbolique** : $\forall z \in \mathbb{C} \quad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$
- **tangente hyperbolique** : $\forall z \in \mathbb{C} \quad z \neq i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) : thz = \frac{shz}{chz} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$
- **cotangente hyperbolique** : $\forall z \in \mathbb{C} \quad z \neq i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) : cothz = \frac{chz}{shz} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$

Les propriétés suivantes sont également vérifiées, en passant directement à l'exponentielle :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}: \quad & ch^2 z - sh^2 z = 1 \\ & ch(-z) = chz \quad sh(-z) = -shz \\ & ch(z + i\pi) = -chz \quad sh(z + i\pi) = -shz \\ & ch\left(z + i\frac{\pi}{2}\right) = ish z \quad sh\left(z + i\frac{\pi}{2}\right) = ichz \end{aligned}$$

➤ Les fonctions hyperboliques sont holomorphes et leurs dérivées sont données par :

$$(shz)' = chz \quad \text{et} \quad (chz)' = shz \quad \text{et} \quad (thz)' = \frac{1}{ch^2 z}$$

2.4 Fonctions Trigonométriques

On peut définir les fonctions trigonométriques ou circulaires, en utilisant les fonctions exponentielles et la formule d'Euler, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} cosz &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ tgz &= \frac{sinz}{cosz} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{et} \quad cotgz = \frac{cosz}{sinz} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} \quad z \neq \pi + k\pi \end{aligned}$$

Les fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations suivantes

$$\begin{aligned} sin(iz) &= ish z & sh(iz) &= isinz & cos(iz) &= chz & ch(iz) &= cosz \\ tg(iz) &= ithz & th(iz) &= itgz & cotg(iz) &= -icothz & cohth(iz) &= cotgz \end{aligned}$$

Remarque :

La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore vérifiées dans le cas complexe, par exemple : $\forall z \in \mathbb{C} : \quad sin^2 z + cos^2 z = 1$

$$sin(z + z') = sinz cosz' + cosz sinz'$$

$$cos(z + z') = cosz cosz' - sinz sinz' \quad \dots \dots etc.$$

Par contre pour $z \in \mathbb{C}$, on peut avoir $|\sin z| > 1$ ou $|\cos z| > 1$

2.5 Fonction Logarithme complexe

On appelle détermination du logarithme de z un nombre complexe t tel que $t = \log z \Leftrightarrow z = e^t$ définie par :

$$\begin{aligned} \forall z \neq 0 \quad \text{Log} z &= \ln|z| + i \arg z \\ &= \ln|z| + i \text{Arg} z + i 2\pi k \quad k \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

On remarque que $\text{Log} z$ est une fonction multiforme (cette fonction possède une infinité de déterminations).

Le nombre $\ln|z| + i \arg z$ ($-\pi \leq \arg z < \pi$) s'appelle souvent **La détermination principale de $\log z$** .

La fonction est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle e^t .

Exemples :

➤ $\text{Log}(i) = \ln|i| + i \arg(i) = \ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, alors La détermination principale de $\log(i)$ est $i\frac{\pi}{2}$.

➤ $\text{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i \arg(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)$,

Donc La détermination principale de $\log(1+i)$ est $\frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$.

2.6 Fonction Puissance

C'est une fonction complexe de la forme $f(z) = z^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{C}$, et définie comme :

$$f(z) = z^\alpha = e^{\alpha \text{Log} z}$$

Nous pouvons définir $f(z)^{g(z)} = e^{g(z)\text{Log} f(z)}$. En général de telles fonctions sont multiformes.

Exemple :

$$i^{-i} = e^{-i \text{Log} i} = e^{-i(\ln|i| + i \arg(i))} = e^{-i(i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k))} = e^{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$$

Alors La détermination principale de i^{-i} est $e^{\frac{\pi}{2}}$

2.7 Fonctions trigonométriques inverses

Si $z = \sin t$ alors $t = \arcsin z$ est appelée la fonction inverse de $\sin z$ ou *arc sinus de z*. De la même façon on peut définir d'autres fonctions trigonométriques inverses $\arccos z, \operatorname{arctg} z, \text{etc.}$ Ces fonctions qui sont multiformes peuvent être exprimées au moyen de la fonction logarithme

$$\arcsin z = \frac{1}{i} \operatorname{Log} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right)$$

$$\arccos z = \frac{1}{i} \operatorname{Log} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right)$$

$$\operatorname{arcctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{z + i}{z - i} \right)$$

2.7 Fonctions hyperboliques inverses

Si $z = \operatorname{sh} t$ alors $t = \operatorname{argsh} z$ est appelée la fonction inverse de *sinus hyperboliques*. De la même façon on peut définir d'autres fonctions inverses des fonctions hyperboliques $\operatorname{argch} z, \operatorname{argth} z, \text{etc.}$ Ces fonctions qui sont multiformes peuvent être exprimées au moyen de la fonction logarithme

$$\operatorname{argsh} z = \operatorname{Log} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right)$$

$$\operatorname{argch} z = \operatorname{Log} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

$$\operatorname{argth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right)$$

$$\operatorname{argcoth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right)$$