

Exercice 1

Solution :

1)

$$a) \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i$$

$$b) \frac{(2+3i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{1}{25}(-1 + 18i)$$

$$c) (1+i)^n + (1-i)^n = \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right)^n + \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right)^n \\ = 2^{1+\frac{n}{2}} \cos n \frac{\pi}{4}$$

2)

$$a) -9i = 9 \left(\cos -\frac{\pi}{2} + i \sin -\frac{\pi}{2}\right) = 9e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$b) 4 - 4i = 4\sqrt{2} \left(\cos -\frac{\pi}{4} + i \sin -\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$c) -2 - 2i\sqrt{3} = 4 \left(\cos -\frac{2\pi}{3} + i \sin -\frac{2\pi}{3}\right) = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$d) \sqrt{6} + i\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Exercice 2

b) On vérifié les conditions de Cauchy-Riemann sous la forme :

$$\boxed{\forall (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2: \frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial g}{\partial y} = 0}$$

$$g(z) = (ax + iby)^2 - i(ax - ib) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2a(ax + iby) - ia \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2ib(ax + iby) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 2(a - b)(ax + iby) - ia \neq 0$$

Alors les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées par conséquent la fonction g n'est pas holomorphe

c) On vérifié les conditions de Cauchy-Riemann sous la forme :

$$\boxed{\forall z \in D: \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0}$$

$$h(z) = |z| - i \operatorname{Im}(z) = \sqrt{z \cdot \bar{z}} - \frac{z - \bar{z}}{2} \Rightarrow \left\{ \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{\bar{z}}} + \frac{1}{2} \neq 0 \right.$$

$\Rightarrow$ Alors les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées par conséquent la fonction h n'est pas holomorphe

d) On vérifié **les conditions de Cauchy-Riemann** sous la forme :

$$\boxed{\forall z \in D: \frac{\partial L}{\partial \bar{z}} = 0}$$

$$L(z) = \ln|\bar{z}| + i \operatorname{Arctg} \frac{\bar{z} - z}{i(z + \bar{z})} = \frac{1}{2} \ln z \cdot \bar{z} + i \operatorname{Arctg} \frac{\bar{z} - z}{i(z + \bar{z})}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\bar{z}} + i \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\bar{z} - z}{i(z + \bar{z})} \right)}{1 + \left(\frac{\bar{z} - z}{i(z + \bar{z})} \right)^2} \neq 0 \right.$$

$\Rightarrow$ **Alors** les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées par conséquent la fonction **L** n'est pas holomorphe

Exercice 3

Solution : soit $\operatorname{Re} f(z) = P(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$ on vérifié si **P** est une fonction Harmonique :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = e^x((x+1)\cos y - y \sin y) \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = e^x((x+2)\cos y - y \sin y) \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -e^x((x+1)\sin y + y \cos y) \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -e^x((x+2)\cos y - y \sin y) \end{cases}$$

$$\text{D'où } \Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = e^x((x+2)\cos y - y \sin y) - e^x((x+2)\cos y - y \sin y) = 0$$

Alors **P** est une fonction Harmonique, c'est-à-dire qu'il existe une fonction **f** holomorphe telle que :

$f = P + iQ \Rightarrow f$ est holomorphe, elle vérifie les conditions de Cauchy- Riemann s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial y} = e^x((x+1)\cos y - y \sin y) \quad \dots (1) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x((x+1)\sin y + y \cos y) \quad \dots (2) \end{cases}$$

De l'équation (1) on tire

$$Q(x, y) = \int e^x((x+1)\cos y - y \sin y) \, dy \Rightarrow Q(x, y) = e^x(x \sin y + y \cos y) + g(x)$$

[on intègre par partie $\int e^x(-y \sin y) \, dy = e^x(y \cos y - \sin y)$]

En suite, on dérive $Q(x, y)$ par / à **x** on trouve

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x((x+1)\sin y + y \cos y) + g'(x)$$

Et de l'équation (2) $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x((x+1)\sin y + y\cos y) \Rightarrow g'(x) = 0$ alors $g(x) = C^{te}$

D'où $Q(x, y) = e^x(x\sin y + y\cos y)$

Finalement on trouve :

$$f = P(x, y) + iQ(x, y) = e^x(x\cos y - y\sin y) + ie^x(x\sin y + y\cos y) + ic$$

$$f = e^x((x + iy)\cos y + (ix - y)\sin y) + ic = e^x((x + iy)\cos y + i(x + iy)\sin y) + ic$$

$$\Rightarrow f = (x + iy)e^x(\cos y + isin y) + ic = (x + iy)e^x e^{iy} + ic$$

$$\Rightarrow f(z) = ze^z + ic$$

Exercice 4

Solution : soit $\Im m g(z) = Q(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ on vérifié si Q est une fonction Harmonique :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 2 \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 2 \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \Delta P = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 2 \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} + 2 \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Alors Q est une fonction Harmonique, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f holomorphe telle que :

$f = P + iQ \Rightarrow f$ est holomorphe, elle vérifie les conditions de Cauchy- Riemann s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2y}{x^2 + y^2} \quad \dots (1) \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2x}{x^2 + y^2} \quad \dots (2) \end{cases}$$

De l'équation (1) on tire

$$P(x, y) = \int \frac{2y}{x^2 + y^2} dx = \frac{2y}{y^2} \int \frac{\partial x}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(\text{on fait le changement de variable } t = \frac{x}{y} \text{ on trouve} \right)$$

$$\Rightarrow P(x, y) = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} + g(y)$$

En suite, on dérive $P(x, y)$ par / à y on trouve

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2 \frac{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right)}{1 + \frac{x^2}{y^2}} + g'(y) = 2 \frac{\frac{-x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} + g'(y) = - \frac{2x}{x^2 + y^2} + g'(y)$$

Et de l'équation (2) $\frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{2x}{x^2 + y^2} \Rightarrow g'(x) = 0$ alors $g(x) = C^{te}$

D'où $P(x, y) = 2 \operatorname{arc} tg \frac{x}{y} + c$

Finalement on trouve :

$$f = P(x, y) + iQ(x, y) = P(x, y) = 2 \operatorname{arc} tg \frac{x}{y} + i \ln(x^2 + y^2) + c$$

$$f = 2i \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - i \operatorname{arc} tg \frac{x}{y} + ic \right) = 2i \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arc} tg \frac{y}{x} + ic \right) \Rightarrow$$

$$f = 2i(\ln|z| + i \operatorname{arg} z + ic) = 2i(\operatorname{Log} z) + ic$$