

Exercice 1

1 Addition : $A + B$

On additionne terme à terme :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 + 3 & -2 + 1 & 3 + (-1) \\ 0 + 2 & 4 + 0 & 5 + 4 \\ -1 + 5 & 2 + (-2) & 0 + 6 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 9 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

2 Soustraction : $A - B$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 - 3 & -2 - 1 & 3 - (-1) \\ 0 - 2 & 4 - 0 & 5 - 4 \\ -1 - 5 & 2 - (-2) & 0 - 6 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ -6 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

3 Combinaison : $3A + 2B$

Calcul de $3A$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 12 & 15 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de $2B$

$$2B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 8 \\ 10 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

Addition

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 7 \\ 4 & 12 & 23 \\ 7 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

4 $B - 4A$

Calcul de $4A$

$$4A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 0 & 16 & 20 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Soustraction

$$B - 4A = \begin{pmatrix} 3 - 4 & 1 - (-8) & -1 - 12 \\ 2 - 0 & 0 - 16 & 4 - 20 \\ 5 - (-4) & -2 - 8 & 6 - 0 \end{pmatrix}$$

$$B - 4A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & -13 \\ 2 & -16 & -16 \\ 9 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$

5 Produit : AB

On multiplie lignes \times colonnes.

Première ligne

$$(1, -2, 3)$$

- Colonne 1 : $1 \times 3 + (-2) \times 2 + 3 \times 5 = 3 - 4 + 15 = 14$
- Colonne 2 : $1 \times 1 + (-2) \times 0 + 3 \times (-2) = 1 - 6 = -5$
- Colonne 3 : $1 \times (-1) + (-2) \times 4 + 3 \times 6 = -1 - 8 + 18 = 9$

Même procédé pour les autres lignes :

$$AB = \begin{pmatrix} 14 & -5 & 9 \\ 33 & -10 & 46 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

6 Produit : BA

Même méthode :

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 14 \\ -2 & 4 & 6 \\ -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

☞ Conclusion importante :

$$AB \neq BA$$

7 Inversion : A^{-1}

Étape 1 : Déterminant

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1(4 \times 0 - 5 \times 2) + 2(0 \times 0 - 5 \times (-1)) + 3(0 \times 2 - 4 \times (-1)) \\ &= -10 + 10 + 12 = 12\end{aligned}$$

Étape 2 : Comatrice (cofacteurs)

Après calcul :

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} -10 & -5 & 4 \\ 6 & 3 & 0 \\ -22 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Étape 3 : Transposée (adjugée)

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -10 & 6 & -22 \\ -5 & 3 & -5 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Étape 4 : Division par le déterminant

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \frac{1}{12} \text{Adj}(A) \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{11}{6} \\ -\frac{5}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

8 Puissance : B^3

$$\text{Étape 1 : } B^2 = BB$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 26 & -6 & 26 \\ 41 & -7 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\text{Étape 2 : } B^3 = B^2 B$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 3 & 16 & -16 \\ 176 & -18 & 82 \\ 224 & -5 & 69 \end{pmatrix}$$

9 $(AB)^{-1}$

Propriété fondamentale :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

☞ **Ordre inversé !**

En calculant l'inverse de AB :

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{108} & \frac{1}{12} & -\frac{35}{108} \\ -\frac{251}{432} & \frac{13}{48} & -\frac{347}{432} \\ -\frac{23}{432} & \frac{1}{48} & \frac{25}{432} \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On donne :

$$A = (4 \quad 3 \quad -1) \quad (\text{matrice ligne } 1 \times 3)$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\text{matrice colonne } 3 \times 1)$$

1. Calculer AB , BA , A^2 , B^2

$AB : 1 \times 3 \times 3 \times 1 \rightarrow$ **matrice** 1×1

$$AB = (4)(5) + (3)(2) + (-1)(3) = 20 + 6 - 3 = 23$$

Donc $AB = (23)$ (un scalaire, ou matrice 1×1).

$BA : 3 \times 1 \times 1 \times 3 \rightarrow$ **matrice** 3×3

$$BA = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (4 \quad 3 \quad -1) = \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 & 5 \cdot 3 & 5 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 15 & -5 \\ 8 & 6 & -2 \\ 12 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

A^2

A est 1×3 , on ne peut pas multiplier A par A ($3 \neq 1$).

Donc A^2 n'est pas défini.

B^2

B est 3×1 , on ne peut pas multiplier B par B ($1 \neq 3$).

Donc B^2 n'est pas défini.

Conclusion : AB est un scalaire, BA est une matrice carrée 3×3 .

2. Calculer $(AB)^2$, $(BA)^2$, $(ABA)^2$, $(BAB)^2$

- $(AB)^2 = (23)^2 = 529$ (produit scalaire \times scalaire)

- $(BA)^2 = (BA)(BA)$

On calcule BA (déjà obtenu) :

$$BA = \begin{pmatrix} 20 & 15 & -5 \\ 8 & 6 & -2 \\ 12 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Multiplions par elle-même :

Ligne 1 \times Colonne 1 : $20 \times 20 + 15 \times 8 + (-5) \times 12 = 400 + 120 - 60 = 460$

Ligne 1 \times Colonne 2 : $20 \times 15 + 15 \times 6 + (-5) \times 9 = 300 + 90 - 45 = 345$

Ligne 1 \times Colonne 3 : $20 \times (-5) + 15 \times (-2) + (-5) \times (-3) = -100 - 30 + 15 = -115$

Ligne 2 \times Colonne 1 : $8 \times 20 + 6 \times 8 + (-2) \times 12 = 160 + 48 - 24 = 184$

Ligne 2 \times Colonne 2 : $8 \times 15 + 6 \times 6 + (-2) \times 9 = 120 + 36 - 18 = 138$

Ligne 2 \times Colonne 3 : $8 \times (-5) + 6 \times (-2) + (-2) \times (-3) = -40 - 12 + 6 = -46$

Ligne 3 \times Colonne 1 : $12 \times 20 + 9 \times 8 + (-3) \times 12 = 240 + 72 - 36 = 276$

Ligne 3 \times Colonne 2 : $12 \times 15 + 9 \times 6 + (-3) \times 9 = 180 + 54 - 27 = 207$

Ligne 3 \times Colonne 3 : $12 \times (-5) + 9 \times (-2) + (-3) \times (-3) = -60 - 18 + 9 = -69$

Donc :

$$(BA)^2 = \begin{pmatrix} 460 & 345 & -115 \\ 184 & 138 & -46 \\ 276 & 207 & -69 \end{pmatrix}$$

- $(ABA)^2$

$$ABA = (AB)A = 23 \times A \text{ (car } AB \text{ est scalaire)}$$

$$23A = (92 \quad 69 \quad -23)$$

C'est une matrice 1×3 .

$(ABA)^2$ n'est pas défini (car $1 \times 3 \times 1 \times 3$ impossible).

- $(BAB)^2$

$$BAB = B(AB) = B \times 23 = 23B$$

$$23B = \begin{pmatrix} 115 \\ 46 \\ 69 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice 3×1 .

$(BAB)^2$ n'est pas défini.

3. Calculer $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$, $(AB)^2(AB)^{-1}$, $(BA)^2(BA)^{-1}$

- $(AB)^{-1}$

$AB = 23$, donc son inverse (scalaire) est $\frac{1}{23}$.

- $(BA)^{-1}$

BA est une matrice 3×3 .

On remarque que les lignes sont proportionnelles ($L2 = 0,4 L1$, $L3 = 0,6 L1$), donc $\det(BA) = 0$.

BA n'est pas inversible, donc $(BA)^{-1}$ n'existe pas.

- $(AB)^2(AB)^{-1} = 529 \times \frac{1}{23} = 23$

- $(BA)^2(BA)^{-1}$ n'est pas défini car $(BA)^{-1}$ n'existe pas.

Exercice 3

1. Matrice nulle 3×3

$$0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Trace de A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = 2 + (-1) + 6 = 7$$

3. Type des matrices

- A : triangulaire supérieure (tous les termes sous la diagonale sont nuls)
- B : diagonale
- C : unité (ou identité)
- D : scalaire
- E : symétrique (car $E^T = E$)

4. Trouver x, y, z

On a :

$$\begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ 4 & y & 6 \\ 7 & 8 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Par identification terme à terme :

- $x = 1$
- $y = 5$
- $z = 9$