Diagonalisation d'une matrice

La **diagonalisation d'une matrice** consiste à transformer une matrice carrée A en une matrice **diagonale** D à l'aide d'une matrice inversible P, telle que :

$$A = PDP^{-1}$$

où :

- D est une matrice diagonale contenant les **valeurs propres** de A.
- P est la matrice formée par les **vecteurs propres** de A.

1 Étapes pour diagonaliser une matrice

Soit une matrice carrée A.

Étape 1 : Calculer les valeurs propres

On calcule les valeurs propres en résolvant :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- I : matrice identité
- λ : valeur propre

C'est le **polynôme caractéristique**.

Étape 2 : Trouver les vecteurs propres

Pour chaque valeur propre λ, on résout :

$$(A - \lambda I)X = 0$$

Les solutions non nulles X sont les **vecteurs propres**.

Étape 3 : Construire la matrice P

On forme la matrice P avec les vecteurs propres comme colonnes.

$$P = (v_1\ v_2\ \dots\ v_n)$$

Étape 4 : Construire la matrice diagonale D

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres apparaissent dans le même ordre que les vecteurs propres dans P.

2 Exemple détaillé

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Polynôme caractéristique

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(3-\lambda) - 2$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

2. Valeurs propres

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$$

Donc :

$$\lambda_1 = 5 \quad , \quad \lambda_2 = 2$$

3. Vecteur propre pour $\lambda_1 = 5$

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Résoudre :

$$-x + y = 0$$

$$y = x$$

Vecteur propre :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Vecteur propre pour $\lambda_2 = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2x + y = 0$$

$$y = -2x$$

Vecteur propre :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

5. Matrice P

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

6. Matrice diagonale D

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Relation finale

$$A = PDP^{-1}$$

La matrice est donc **diagonalisable**.

Condition importante :

Une matrice $n \times n$ est diagonalisable si elle possède **n vecteurs propres linéairement indépendants**.

Exercice : Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On veut trouver une matrice P et une matrice diagonale D telles que

$$A = PDP^{-1}$$

1 Calcul des valeurs propres

On calcule le **polynôme caractéristique**

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Calcul du déterminant :

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1)$$

Développons :

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

Donc

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

Factorisation :

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

Ainsi :

$$(1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

Valeurs propres

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_3 = 3$$

La valeur propre **1 est double**.

2 Vecteurs propres pour $\lambda = 1$

On résout

$$(A - I)X = 0$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Système :

$$y + z = 0$$

Donc

$$y = -z$$

Variables libres : x et z

Solution générale :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ z \end{pmatrix}$$

On choisit deux vecteurs indépendants :

Si $x = 1, z = 0$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $x = 0, z = 1$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 Vecteur propre pour $\lambda = 3$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Système :

$$-2x = 0$$

$$-y + z = 0$$

Donc

$$x = 0$$

$$y = z$$

Vecteur propre :

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4 Construction de la matrice P

On place les vecteurs propres en colonnes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5 Construction de la matrice diagonale D

On place les valeurs propres dans le même ordre :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6 Résultat final

La matrice est **diagonalisable** car on a **3 vecteurs propres linéairement indépendants**.

Donc :

$$A = PDP^{-1}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

Pour diagonaliser une matrice :

1. Calculer $\det(A - \lambda I)$
2. Trouver les **valeurs propres**
3. Calculer les **vecteurs propres**
4. Construire P avec les vecteurs propres
5. Construire D avec les valeurs propres

Voici **les astuces rapides utilisées en examen** pour savoir **en quelques secondes si une matrice est diagonalisable** (sans faire tous les calculs).

⚡ Astuce 1 : Valeurs propres toutes différentes

✅ **Si une matrice $n \times n$ possède n valeurs propres distinctes → elle est toujours diagonalisable.**

Exemple :

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$$

Les valeurs propres sont différentes ⇒ **matrice diagonalisable directement**.

⚡ Astuce 2 : Matrice symétrique

Si la matrice vérifie :

$$A^T = A$$

(alors elle est **symétrique**)

✅ Toute matrice symétrique réelle est **diagonalisable**.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice est symétrique ⇒ **diagonalisable immédiatement**.

⚡ Astuce 3 : Multiplicité

Si une valeur propre est **répétée**, il faut vérifier les vecteurs propres.

Règle rapide :

$$\text{multiplicité algébrique} = \text{nombre de vecteurs propres}$$

Si c'est vrai ⇒ **diagonalisable**

Sinon ⇒ **pas diagonalisable**.

Exemple :

Valeurs propres :

$$1, 1, 2$$

Si on trouve **2 vecteurs propres pour λ=1** ⇒ diagonalisable.

Si on trouve **1 seul vecteur propre** ⇒ **non diagonalisable**.

⚡ Astuce 4 : Matrice triangulaire

Si la matrice est **triangulaire**, les valeurs propres sont **les éléments de la diagonale**.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres :

$$1,\ 4,\ 7$$

Toutes différentes ⇒ **diagonalisable directement**.

⚡ Astuce 5 :

Si la matrice a la forme :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

Elle est **symétrique** ⇒ **toujours diagonalisable**.

Systèmes d'équations

1 Forme générale

Un système linéaire peut s'écrire par exemple :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

où :

- x, y, z sont les **inconnues**
- les coefficients a, b, c sont des **nombres connus**

2 Exemple simple

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

3 Méthode de résolution (substitution)

De la première équation :

$$y = 5 - x$$

On remplace dans la deuxième :

$$2x - (5 - x) = 1$$

$$2x - 5 + x = 1$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

Puis

$$y = 5 - 2 = 3$$

✅ Solution :

$$(x, y) = (2, 3)$$

4 Méthode matricielle

Un système peut s'écrire sous forme de matrice :

$$AX = B$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si la matrice A est inversible :

$$X = A^{-1}B$$

5 Types de solutions

Un système linéaire peut avoir :

✅ 1 solution unique

Les équations se croisent en un seul point.

♾ Infinité de solutions

Les équations représentent la même droite ou le même plan.

Exemple :

$$x + y = 2$$

$$2x + 2y = 4$$

❌ Aucune solution

Les équations sont incompatibles.

Exemple :

$$x + y = 2$$

$$x + y = 5$$

Méthode de Gauss

La **méthode de Gauss** (ou **élimination de Gauss**) est une méthode utilisée pour résoudre un **système d'équations linéaires**. L'idée est de transformer le système en un système plus simple appelé **système triangulaire**, puis de trouver les inconnues.

1. Exemple de système

Considérons le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

2. Écrire la matrice augmentée

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 2 & -1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

3. Élimination (annuler les termes sous le premier pivot)

Pivot = **1** (première ligne).

- $L2 = L2 - 2L1$
- $L3 = L3 - L1$

On obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & -3 & -1 & | & -9 \\ 0 & 1 & -2 & | & -3 \end{bmatrix}$$

4. Annuler sous le deuxième pivot

Pivot = **-3**

- $L3 = L3 + \frac{1}{3}L2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & -3 & -1 & | & -9 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & | & -6 \end{bmatrix}$$

5. Résolution par substitution

Dernière équation :

$$-\frac{7}{3}z = -6$$

$$z = \frac{18}{7}$$

Deuxième équation :

$$-3y - z = -9$$

$$y = \frac{15}{7}$$

Première équation :

$$x + y + z = 6$$

$$x = \frac{9}{7}$$

Solution :

$$x = \frac{9}{7}, \quad y = \frac{15}{7}, \quad z = \frac{18}{7}$$

💡 **Principe de la méthode de Gauss :**

1. Écrire la **matrice augmentée**.
2. Utiliser les **opérations sur les lignes** pour obtenir une **forme triangulaire**.
3. Résoudre par **substitution arrière**.