

1. Fonctions circulaires inverses

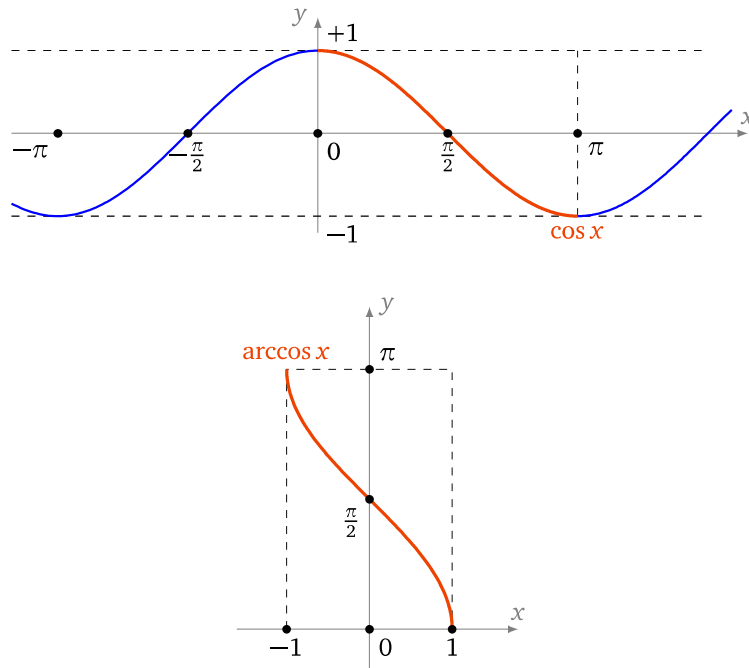
1.1. Arccosinus

Considérons la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $x \mapsto \cos x$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$. Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos|_{[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arccosinus** :

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$



On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$\begin{aligned} \cos(\arccos(x)) &= x \quad \forall x \in [-1, 1] \\ \arccos(\cos(x)) &= x \quad \forall x \in [0, \pi] \end{aligned}$

Autrement dit :

$\text{Si } x \in [0, \pi] \quad \cos(x) = y \iff x = \arccos y$
--

Terminons avec la dérivée de arccos :

$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$

Démonstration. On démarre de l'égalité $\cos(\arccos x) = x$ que l'on dérive :

$$\begin{aligned} \cos(\arccos x) &= x \\ \Rightarrow -\arccos'(x) \times \sin(\arccos x) &= 1 \\ \Rightarrow \arccos'(x) &= \frac{-1}{\sin(\arccos x)} \\ \Rightarrow \arccos'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} \quad (*) \\ \Rightarrow \arccos'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

Le point crucial (*) se justifie ainsi : on démarre de l'égalité $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$, en substituant $y = \arccos x$ on obtient $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1$ donc $x^2 + \sin^2(\arccos x) = 1$. On en déduit : $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1 - x^2}$ (avec le signe + car $\arccos x \in [0, \pi]$, et donc on a $\sin(\arccos x) \geq 0$). \square

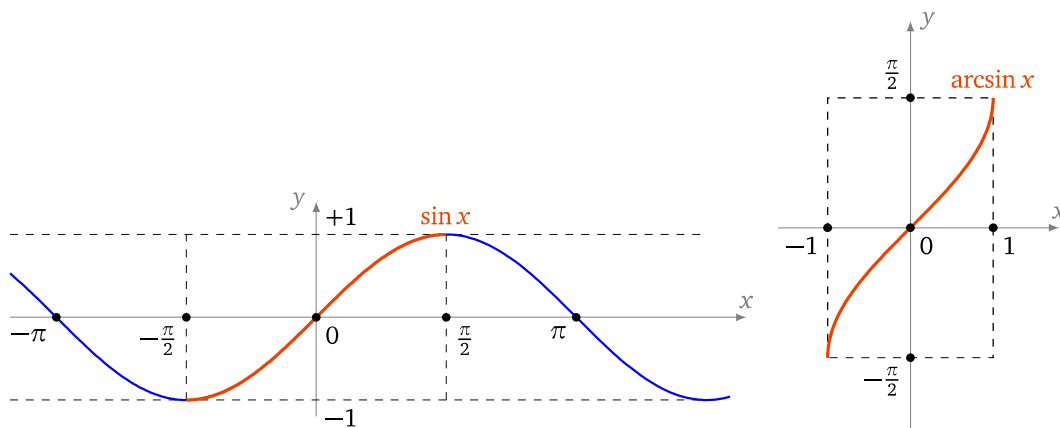
1.2. Arcsinus

La restriction

$$\sin| : \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arcsinus** :

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$



$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(x)) &= x \quad \forall x \in [-1, 1] \\ \arcsin(\sin(x)) &= x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

$$\text{Si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \quad \sin(x) = y \iff x = \arcsin y$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

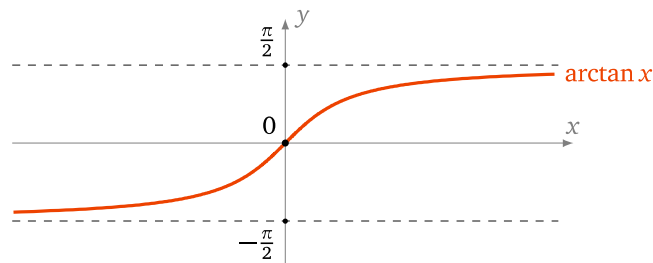
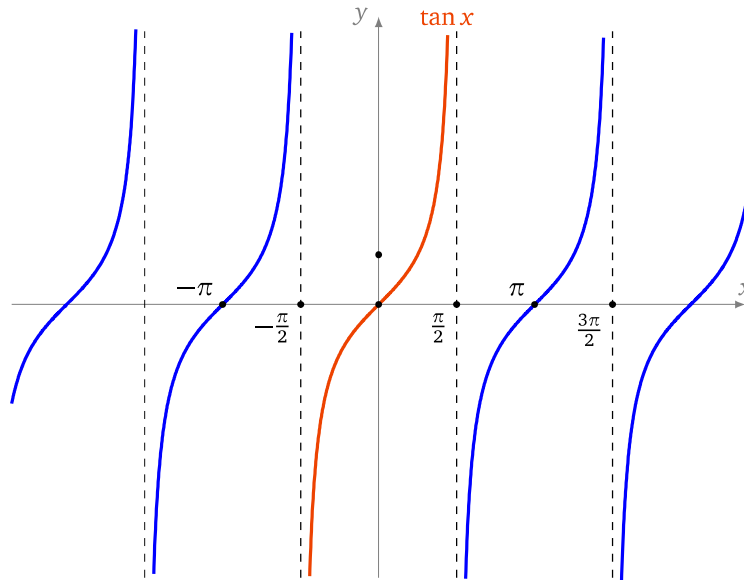
1.3. Arctangente

La restriction

$$\tan| :]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arctangente** :

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$$



$$\begin{aligned} \tan(\arctan(x)) &= x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan(\tan(x)) &= x \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\end{aligned}$$

$$\text{Si } x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\quad \tan(x) = y \iff x = \arctan y$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$