Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique est donné par

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients diagonaux :

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)$$

$$\boxed{P_A(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)}$$

2. Valeurs propres

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 3$$

$$4 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 4$$

3. Multiplicité

Chaque valeur propre apparaît une seule fois dans le polynôme, donc :

$$m(1) = 1, \quad m(3) = 1, \quad m(4) = 1$$

Récapitulatif :

$$\lambda_1 = 1\ (m = 1), \quad \lambda_2 = 3\ (m = 1), \quad \lambda_3 = 4\ (m = 1)$$

Exercice 2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Valeurs propres

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

On développe selon la dernière ligne ou colonne :

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1]$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

Donc :

$$P_A(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3) = -(\lambda-3)^2(\lambda-1)$$

Valeurs propres :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3 \text{ (multiplicité 2)}$$

2. Vecteurs propres

- **Pour λ = 1** :

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Système : $x + y = 0$, $2z = 0$ → $z = 0$, $y = -x$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Pour λ = 3 :**

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Système : $-x + y = 0$ → $y = x$, z libre

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Base des espaces propres

- $E_1 = \text{Vect}\{(1, -1, 0)\}$
- $E_3 = \text{Vect}\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

La matrice est diagonalisable (3 vecteurs propres libres).

Exercice 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Valeurs propres

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2 - \lambda)[(4 - \lambda)^2 - 1] = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 15)$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 3)(\lambda - 5)$$

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-5)$$

Valeurs propres : $\lambda = 2,\ 3,\ 5$

2. Vecteurs propres

- **λ = 2** :

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Système : $2x + y = 0,\ x + 2y = 0$ → $x = 0,\ y = 0$, z libre

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **λ = 3** :

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Système : $x + y = 0,\ -z = 0$ → $z = 0,\ y = -x$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **λ = 5** :

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Système : $-x + y = 0,\ -3z = 0$ → $z = 0,\ y = x$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Diagonalisable ?

Oui, 3 valeurs propres distinctes → 3 vecteurs propres libres → diagonalisable.

4. Matrices P et D

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Vérification : $A = PDP^{-1}$

5. Calcul de A^n

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

Exercice 5

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases}$$

1. Méthode de Gauss

Écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 2 & 1 & 1 & | & 7 \\ 1 & 2 & 3 & | & 14 \end{pmatrix}$$

- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$:

$$(0, -1, -1, |, -5)$$

- $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$(0, 1, 2, |, 8)$$

Système :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -y - z = -5 \\ y + 2z = 8 \end{cases}$$

- $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$(0, 0, 1, |, 3)$$

D'où $z = 3$, puis $-y - 3 = -5$ → $y = 2$, puis $x + 2 + 3 = 6$ → $x = 1$

$$\boxed{x = 1,\ y = 2,\ z = 3}$$

2. Méthode de la matrice inverse

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

On calcule A^{-1} (par exemple par Gauss-Jordan ou comatrice) :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(À vérifier par calcul direct.)

Puis :

$$X = A^{-1}B$$

Donne $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$.

3. Méthode de la matrice triangulaire inférieure