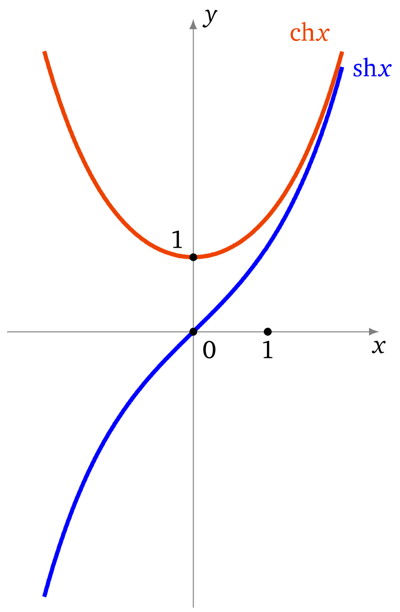
1. Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

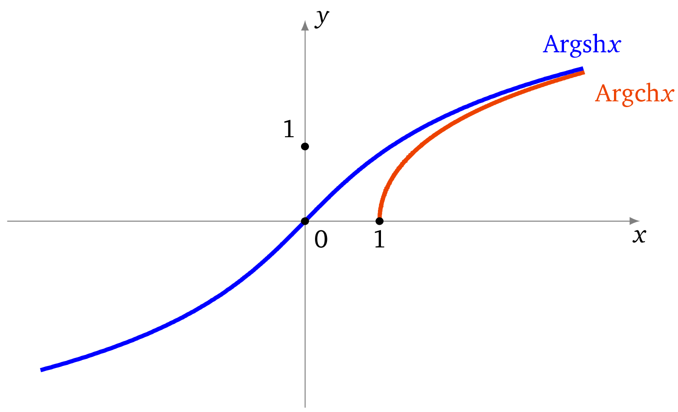
1.1. Cosinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le ***cosinus hyperbolique*** est :

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

La restriction $\operatorname{ch}_| : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est une bijection. Sa bijection réciproque est $\operatorname{Argch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$.





1.2. Sinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le ***sinus hyperbolique*** est :

$$\boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

$\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante vérifiant $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$, c'est donc une bijection. Sa bijection réciproque est $\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 5.

- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
- $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$, $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$
- $\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est strictement croissante et continue.*
- Argsh *est dérivable et* $\operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
- $\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Démonstration.

- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right] = \frac{1}{4}\left[(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\right] = 1$.
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{ch} x) = \frac{d}{dx} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$. Idem pour la dérivée de $\operatorname{sh} x$.
- Car c'est la réciproque de sh.

- Comme la fonction $x \mapsto \operatorname{sh}' x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors la fonction Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule la dérivée par dérivation de l'égalité $\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh} x) = x$:
$$\operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(\operatorname{Argsh} x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
- Notons $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ alors
$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Argsh}' x$$
Comme de plus $f(0) = \ln(1) = 0$ et $\operatorname{Argsh} 0 = 0$ (car $\operatorname{sh} 0 = 0$), on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{Argsh} x$.

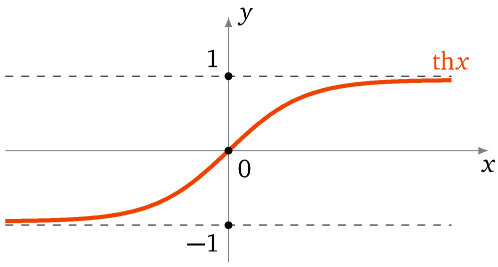
□

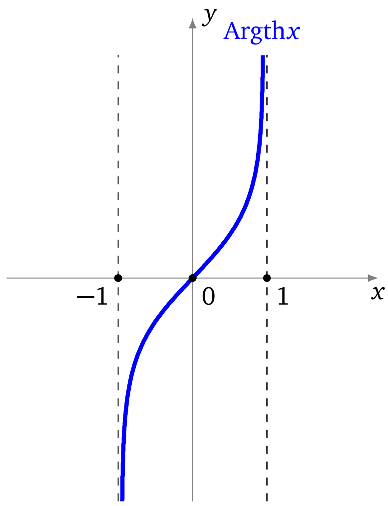
1.3. Tangente hyperbolique et son inverse

Par définition la *tangente hyperbolique* est :

$$\boxed{\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}$$

La fonction $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ est une bijection, on note $\operatorname{Argth} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.





1.4. Trigonométrie hyperbolique

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b$$
$$\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2\operatorname{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 a$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{ch} a$$
$$\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} a$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \cdot \operatorname{th} b}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}' x &= \operatorname{sh} x \\
\operatorname{sh}' x &= \operatorname{ch} x \\
\operatorname{th}' x &= 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Argch}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1) \\
\operatorname{Argsh}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
\operatorname{Argth}' x &= \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Argch} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad (x \geqslant 1) \\
\operatorname{Argsh} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad (x \in \mathbb{R}) \\
\operatorname{Argth} x &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}$$