

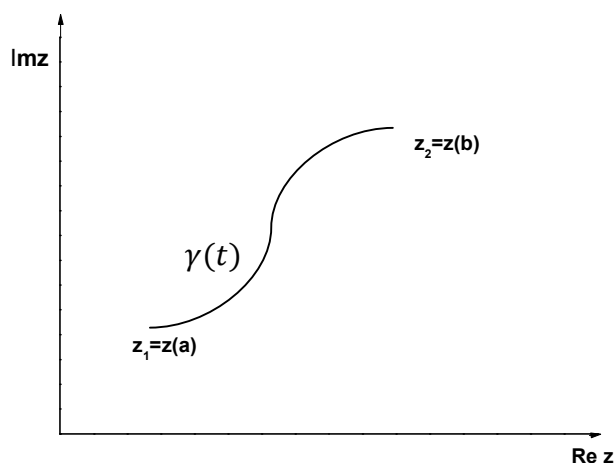
## CHAPITRE 3 : Théorèmes fondamentaux sur les fonctions holomorphes

### 3.1 Intégrale curviligne

**Définition 1 :** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Un chemin  $\gamma$  est une fonction continue d'un intervalle  $[a, b]$  dans  $\mathbb{C}$ .

$$[a, b] \rightarrow \Omega$$

$$\gamma: t \mapsto \gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$$



- Lorsque  $t$  décrit  $[a, b]$ , le point  $\gamma(t)$  décrit une trajectoire  $\gamma([a, b])$  dans le plan  $\mathbb{C}$ .  $\gamma(a)$  est appelé l'origine du chemin et  $\gamma(b)$  son extrémité.
- On dit qu'un chemin est simple si ne se recoupe pas lui-même, c'est-à-dire il n'a pas de points doubles.

- Si le chemin  $\gamma$  est un segment de droite d'origine le point  $a$  et d'extrémité le point  $b$  alors

$$z = \gamma(t) = a + (b - a)t \quad \text{et} \quad 0 \leq t \leq 1$$

- Si le chemin  $\gamma$  est un cercle de centre  $z_0$  et de rayon  $r$  alors :

$$z = \gamma(t) = z_0 + re^{it} \quad \text{et} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

**Définition 2 :** On appelle contour ou lacet un chemin fermé, c'est-à-dire que son origine se confond avec son extrémité, et vérifie  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

### 3.2 Intégration le long d'un chemin

**Définition 3 :** On appelle intégrale de  $f$  le long d'un chemin  $\gamma$  le nombre complexe :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

**Propriétés :**

- Si  $\gamma^*$  désigne le chemin opposé de  $\gamma$ , c'est-à-dire orienté de  $b$  vers  $a$  alors :

$$\int_{\gamma^*} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz$$

- Si  $f$  est telle que  $|f(z)| \leq M$  pour tout  $z \in \gamma([a, b])$  alors :

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| \cdot |dz| \leq M \int_{\gamma} |dz| = ML$$

$L$  : est la longueur du chemin  $\gamma (L = \int_{\gamma} |dz|)$

- Si  $\gamma$  est la juxtaposition de deux chemins  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  alors :

$$\int_{\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

- Si le chemin est fermé et orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens positif) on note  $\oint_{\gamma} f(z)dz$ .

**Exemple :** calculer  $\int_{\gamma} dz$ , où  $\gamma$  est le triangle joignant  $1 + i, 1 - i$  et  $-1 + i$

$$\text{Soit } I = \int_{\gamma} dz = \int_{\gamma_1} dz + \int_{\gamma_2} dz + \int_{\gamma_3} dz$$

Avec :  $\gamma_1$  est le segment de droite  $1 + i$  à  $1 - i$

$$\Rightarrow z = \gamma_1(t) = 1 + i - 2it \text{ et } \gamma_1' = -2idt \Rightarrow I_1 = \int_{\gamma_1} dz = \int_0^1 -2idt = -2i$$

Et  $\gamma_2$  est le segment de droite  $1 - i$  à  $-1 + i$

$$\Rightarrow z = \gamma_2(t) = 1 - i + 2(i - 1)t \text{ et } \gamma_2' = 2(i - 1)dt$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{\gamma_2} dz = \int_0^1 2(i - 1)dt = 2(i - 1)$$

Et  $\gamma_3$  est le segment de droite  $-1 + i$  à  $1 + i$

$$\Rightarrow z = \gamma_3(t) = -1 + i + 2t \text{ et } \gamma_3' = 2dt$$

$$\Rightarrow I_3 = \int_{\gamma_3} dz = \int_0^1 2dt = 2$$

$$\text{Donc par conséquent } I = \int_{\gamma} dz = \int_{\gamma_1} dz + \int_{\gamma_2} dz + \int_{\gamma_3} dz = -2i + 2i - 2 + 2 = 0$$

### 3.3 Théorème de Cauchy

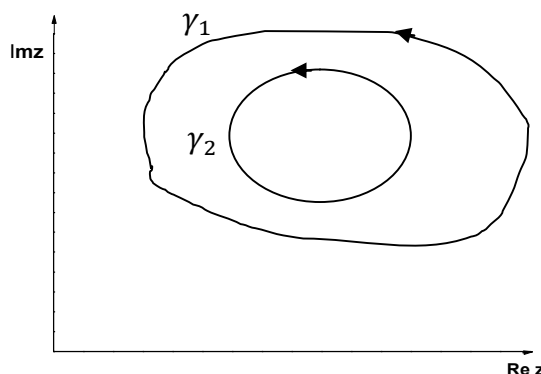
Soit  $\gamma$  une courbe simple fermée. Si  $f(z)$  est une fonction holomorphe dans un domaine  $\Omega$  limité par la courbe  $\gamma$  et sur la courbe  $\gamma$ , alors on a le théorème de Cauchy :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

**Proposition :**

Si  $f(z)$  est une fonction holomorphe à l'intérieur et sur la frontière limité par deux courbes fermées  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ ,

alors on a :  $\oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz = 0$



### 3.4 Formules intégrales de Cauchy

**Théorème 1 :** Si  $f(z)$  est une fonction holomorphe dans un domaine  $\Omega$  limité par la courbe  $\gamma$  et sur la courbe  $\gamma$ , et si  $z_0$  est un point intérieure au domaine, alors :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \tag{I}$$

Où  $\gamma$  est parcourue dans le sens positif (sens inverse des aiguilles d'une montre).

**Démonstration :** posons

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

$f(z)$  est holomorphe dans  $\gamma$  d'où  $g(z)$  est holomorphe dans  $\gamma$ , alors :

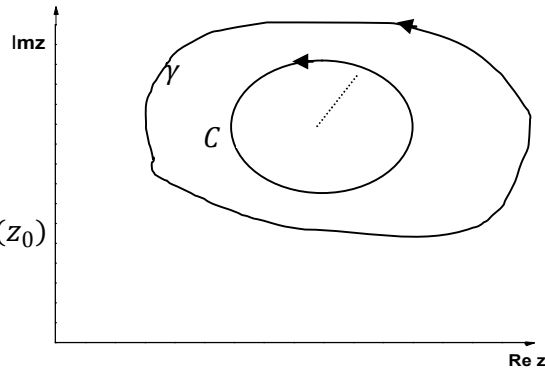
$$\int_{\gamma} g(z) dz = 0 \Leftrightarrow \oint_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0 \Leftrightarrow \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Pour calculer l'intégrale  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$ , on suppose un cercle  $C$  de rayon  $r$  et de centre  $z_0$  à l'intérieure de  $\gamma$

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \oint_C \frac{dz}{z - z_0}$$

Avec  $z - z_0 = re^{it}$   $t \in [0, 2\pi]$

$$\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i \Rightarrow \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$



### **Théorème 2 :**

Par la suite de la relation (I), la dérivée nième de  $f(z)$  au point  $z_0$  est donnée par ne, alors :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \text{(II)}$$

On appelle ces deux relations (I) et (II) les formules intégrales de Cauchy.

**Exemples :** Calculer  $\oint_C \frac{\sin z}{z - \frac{\pi}{2}} dz$  où  $C$  est le cercle définie comme :

- 1)  $|z - 2| = 2$
- 2)  $|z - 4| = 1$

### **Solution :**

- 1) Pour le cercle  $|z - 2| = 2$ , on  $z_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left| \frac{\pi}{2} - 2 \right| < 2 \Rightarrow z_0$  est à l'intérieure de  $C$ , donc on utilise la formule intégrale Cauchy  $\oint_C \frac{\sin z}{z - \frac{\pi}{2}} dz = 2\pi i f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i \sin \frac{\pi}{2} = 2\pi i$  ( $f(z) = \sin z$  est holomorphe).

2) Pour le cercle  $|z - 4| = 1$ , on  $z_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left| \frac{\pi}{2} - 4 \right| > 1 \Rightarrow z_0$  est à l'extérieur de  $C$ , donc  $\frac{\sin z}{z - \frac{\pi}{2}}$  est holomorphe dans  $C$ , alors on utilise le théorème de Cauchy  $\oint_C \frac{\sin z}{z - \frac{\pi}{2}} dz = 0$