

Equations différentielles du premier ordre

Définition 1.1 On appelle équation différentielle une équation établissant une relation entre la variable indépendante x , la fonction inconnue y et ses dérivées, y' , y'' , \dots , $y^{(n)}$.
On peut écrire symboliquement une équation différentielle comme suit :

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Définition 1.2 On appelle ordre d'une équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée contenue dans cette équation différentielle.

Exemple :

$F(x, y, y') = 0$ est une ED d'ordre 1.

$F(x, y, y', y'') = 0$ est une ED d'ordre 2.

$yy'' = x - x^2y' = 0$ est une ED d'ordre 2.

$x' - tx + t^2 = 1$ est une ED d'ordre 1.

Définition 1.3 On appelle solution ou intégrale d'une équation différentielle toute fonction y vérifiant identiquement cette équation différentielle.

Définition 1.4 La courbe représentative de la solution (intégrale) d'une équation différentielle est appelée courbe intégrale.

Remarque 1.1 Résoudre ou intégrer une équation différentielle, il consiste à trouver toutes les solutions de cette équation différentielle.

1.1 EDs du premier ordre

Les équations différentielles du premier ordre (d'ordre un) sont de la forme :

$$F(x, y, y') = 0.$$

1.1.1 EDs à variables séparables

Définition 1.5 On appelle une équation différentielle à variables séparables toute équation de la forme :

$$f(y)y' = g(x). \quad (1.1)$$

où f et g sont deux fonctions numériques définies et continues respectivement sur I et J deux intervalles de \mathbb{R} .

Remarque 1.2 L'équation (1.1) peut s'écrire aussi sous la forme

$$f(y)dy = g(x)dx.$$

Les solutions de l'équation (1.1) sont définies par :

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.1 Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation :

$$x^2y' - y^2 = 0.$$

Il évident que $y = 0$ est une solution, pour $y \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} x^2y' - y^2 = 0 &\iff \frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x^2} \\ &\iff \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2} \\ &\iff -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\iff \frac{1}{y} = \frac{1-cx}{x}, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\iff y = \frac{x}{1-cx} \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble S des solutions est

$$S = \{y = 0 \text{ ou } y = \frac{x}{1-cx}, \quad c \in \mathbb{R}\}$$

Exemple 1.2 Résoudre l'équation :

$$x^2y' = e^y.$$

Pour $x \neq 0$ nous avons

$$\begin{aligned}
 x^2 y' = e^y &\iff \frac{y'}{e^y} = \frac{1}{x^2} \\
 &\iff \frac{dy}{e^y} = \frac{dx}{x^2} \\
 &\iff e^{-y} dy = \frac{dx}{x} \\
 &\iff -e^{-y} = -\frac{1}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
 &\iff e^{-y} = \frac{1}{x} - c, \quad c \in \mathbb{R} \\
 &\iff -y = \ln\left(\frac{1}{x} - c\right), \quad c \in \mathbb{R} \\
 &\iff y = \ln\left(\frac{x}{1 - cx}\right), \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

1.1.2 EDs homogènes :

Définition 1.6 (fonctions homogènes)

Une fonction $f(x, y)$ est dite homogène de ses arguments de degré n si elle vérifie l'identité

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Exemple 1.3 Montrons que $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ est une fonction homogène :

En effet pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
 f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 - (\lambda x)(\lambda y) \\
 &= \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 - \lambda^2 xy \\
 &= \lambda^2 (x^2 + y^2 - xy) \\
 &= \lambda^2 f(x, y)
 \end{aligned}$$

Donc f est une fonction homogène d'ordre 2.

Exemple 1.4 Montrons que $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ est une fonction homogène :

En effet pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
 f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} \\
 &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \\
 &= f(x, y)
 \end{aligned}$$

Donc f est une fonction homogène d'ordre 0.

Définition 1.7 (ED homogène)

Une équation différentielle de la forme $y' = f(x, y)$ est dite homogène lorsque la fonction $f(x, y)$ est homogène de degré zéro.

Remarque 1.3 Une équation différentielle homogène peut se mettre toujours sous la forme :

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

1.1.3 La résolution d'une équation différentielle homogène :

Soit l'équation différentielle homogène :

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (*).$$

Posons $\frac{y}{x} = u$, donc $y = ux \iff y' = xu' + u$ alors

$$\begin{aligned} (*) &\iff xu' + u = f(u) \\ &\iff xu' = f(u) - u \\ &\iff \frac{u'}{f(u) - u} = \frac{1}{x} \\ &\iff \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \\ &\iff \int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc les solutions de l'équation (*) sont définies par :

$$y = xu, \quad \text{et} \quad x = ke^{\int \frac{du}{f(u) - u}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.5 Réoudre l'équation suivante

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y \quad (**).$$

En effet pour $x \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} (**) &\iff y' = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} \\ &\iff y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Posons $\frac{y}{x} = u$, donc $y' = xu' + u$, alors

$$\begin{aligned} (**) &\iff xu' + u = \sqrt{1 - u^2} + u \\ &\iff xu' = \sqrt{1 - u^2} \\ &\iff \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{x} \\ &\iff \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x} \\ &\iff \arcsin u = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\iff u = \sin(\ln|x| + c), \quad c \in \mathbb{R} \\ &\iff y = x \sin(\ln|x| + c), \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemple 1.6 *Intégrer l'équation*

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \quad (***)$$

$$\begin{aligned} (***) &\iff 2y' = \frac{y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy} \\ &\iff 2y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Posons $\frac{y}{x} = u$, donc $y' = xu' + u$, alors

$$\begin{aligned} (***) &\iff 2xu' + 2u = u - \frac{1}{u} \\ &\iff 2xu' = -\frac{u^2 + 1}{u} \\ &\iff \frac{2uu'}{1 + u^2} = -\frac{1}{x} \\ &\iff \frac{2udu}{1 + u^2} = -\frac{dx}{x} \\ &\iff \ln(1 + u^2) = -\ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\iff 1 + u^2 = e^{-\ln|x|+c}, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\iff u^2 = \frac{k}{x} - 1, \quad k \in \mathbb{R} \\ &\iff y^2 = kx - x^2, \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1.1.4 EDs se ramenant aux équations homogènes

Considérons une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right) \quad (*)$$

où a, a', b, b', c, c' , sont des constantes réelles et f est une fonction continue.

1. Si $c = c' = 0$ l'équation (*) est homogène.

2. Lorsque l'un au moins des nombres c, c' est différent de zéro, il convient de distinguer deux cas :

2.1 Le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

En introduisant les nouvelles variables α et β définies par les formules :

$$\begin{cases} x = \alpha + k \\ y = \beta + l \end{cases}$$

où k et l sont pour l'instant des constantes indéterminées. Alors

$$(*) \iff \frac{d\beta}{d\alpha} = f\left(\frac{a\alpha + b\beta + ak + bl + c}{a'\alpha + b'\beta + a'k + b'l + c'}\right)$$

1.1 EDs du premier ordre

En choisissant k et l comme solution du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} ak + bl + c = 0 \\ a'k + b'l + c' = 0. \end{cases} \quad (\Delta \neq 0)$$

On obtient une équation différentielle homogène

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = f\left(\frac{a\alpha + b\beta}{a'\alpha + b'\beta}\right).$$

En cherchant son intégrale générale et en y remplaçant α par $(x - k)$ et β par $(y - l)$ on obtient l'intégrale générale de (*)

2.2 Le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$, dans ce cas il existe un réel λ tel que

$$a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b$$

$$(*) \iff \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{(ax + by) + c}{\lambda(ax + by) + c'}\right)$$

la substitution $z = ax + by$ se ramène cette équation à une équation différentielle à variables séparables.

Exemple 1.7 Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0 \quad (*).$$

Considérant le système linéaire

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases},$$

Le déterminant de ce système est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Alors le système admet une solution unique $(k, l) = (-1, 3)$, en faisant le changement de variables

$$x = \alpha - 1, \quad y = \beta + 3.$$

On obtient

$$\begin{cases} x + y - 2 = \alpha + \beta \\ x - y + 4 = \alpha - \beta \\ dx = d\alpha \\ dy = d\beta, \end{cases}$$

et l'équation (*) devient

$$(\alpha + \beta)d\alpha + (\alpha - \beta)d\beta = 0,$$

est une équation homogène. En posant $\beta = t\alpha$, on obtient

$$(\alpha + t\alpha)d\alpha + (\alpha - t\alpha)(\alpha dt + t d\alpha) = 0$$

d'où (après des simplifications)

$$(1 + 2t - t^2)d\alpha + \alpha(1 - t)dt = 0$$

séparons les variables

$$\frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{(1 - t)dt}{1 + 2t - t^2} = 0$$

on intègre il vient

$$\ln|\alpha| + \frac{1}{2} \ln|1 + 2t - t^2| = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

où

$$\alpha^2(1 + 2t - t^2) = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

revenons aux variables x, y :

$$(x + y)^2 \left[1 + \frac{2(y - 3)}{x + 1} - \frac{(y - 3)^2}{(x + 1)^2} \right] = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.8 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0 \quad (**).$$

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases},$$

on a donc $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Posons $z = x + y$, $dz = dx + dy$.

$$\begin{aligned} (**) &\iff (z + 1)dx + (2z - 1)(dz - dx) = 0 \\ &\iff (-z + 2)dx + (2z - 1)dz = 0. \end{aligned}$$

En séparant les variables, on obtient

$$dx - \frac{2z - 1}{z - 2} dz = 0$$

d'où

$$x - 2z - 3 \ln|z - 2| = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

En revenant aux variables x, y on obtient l'intégrale générale de (**)

$$x + 2y + 3 \ln|x + y - 2| = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$