Equations différentielles d'ordre deux

2.1 Equations différentielles du deuxième ordre

Définition 2.1 *On appelle équation différentielle du deuxième ordre toute relation de la forme*

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

entre la variable x, la fonction inconnue $y(x)$ et ses dérivées première et seconde.
La solution φ deux fois dérivable, est dite solution (où intégrale) sur $I \subset \mathbb{R}$ si

$$\forall \in I \quad F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) = 0.$$

Remarques :
① - Une équation différentielle du deuxième ordre admet une infinité de solutions dépendant de deux constantes arbitraires λ_1 et λ_2 tels que

$$y(x) = \varphi(x, \lambda_1, \lambda_2)$$

② - L'ensemble des solutions constitue l'intégrale générale et représente l'équation d'une famille de courbes dépendant de deux paramètres C_{λ_1,λ_2} appelées courbes intégrales.
③ - Inversement à toute famille de courbes dépendant de deux paramètres d'équation

$$F(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$

on peut associer une équation différentielle du second ordre.

2.1.1 Equations différentielles se ramenant au premier ordre

L'intégration de certaines équations du second ordre peut se ramener à celle d'équations du premier ordre.

2.1.2 Equation ne contenant pas y

Soit une équation du second ordre de la forme

$$F(x, y', y'') = 0.$$

En posant $y' = z$ l'équation de vient :

$$F(x, z, z') = 0$$

z est donc solution d'une équation du 1^{er} ordre. Lorseque z est connue on obtient l'intégrale générale de l'équation proposée par une nouvelle intégration.
Exemple : Intégrer l'équation

$$y'' + y'^2 = 0.$$

En posant $y' = z$ on obtient $z' + z^2 = 0$
c'est-à-dire $-\dfrac{dz}{z^2} = dx$
d'où $\dfrac{1}{z} = x - x_0$ (x_0 constant)
par conséquent $z = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x - x_0}$
donc $dy = \dfrac{dx}{x - x_0}$
en intégrant

$$y - y_0 = \ln |x - x_0|$$

la solution générale dépend de deux constantes x_0 et y_0.

2.1.3 Equation ne contenant pas x

Soit une équation du second ordre dans laquelle x ne se figure pas :

$$F(y, y', y'') = 0.$$

Si l'on considère y' comme fonction inconnue de y, en posant $y' = z(y)$ on obtient :

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$$

y joue donc le rôle de variable et l'équation devient :

$$F\Big(y, z, z\frac{dz}{dy}\Big) = 0$$

c'est-à-dire une équation du 1^{er} ordre pour z.
Soit $z = \varphi(y, \lambda_1)$ l'intégrale générale de cette équation :
$z = \dfrac{dy}{dx} = \varphi(y, \lambda_1)$ ou encore $\dfrac{dy}{\varphi(y, \lambda_1)} = dx$
en intégrant on obtient $x = f(y, \lambda_1) + \lambda_2$, avec $f(y, \lambda_1) = \displaystyle\int \frac{dy}{\varphi(y, \lambda_1)}$ la solution générale

dépend de deux constantes λ_1 et λ_2.
Exemple : Intégrer l'équation

$$y^2y'' + y' = 0. \qquad (*)$$

En posant $y' = z(y)$ soit $y'' = z \cdot z'$
l'équation devient :

$$y^2zz' + z = 0$$

ou encore, en ecartant la solution $z = 0$ (correspondant à $y = const$) :

$$y^2z' + 1 = 0$$

qui conduit à $z' = -\dfrac{1}{y^2}$ puis $z = \dfrac{1}{y} + \lambda_1$ $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.
On est donc ramené $(*)$ à une équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} + \lambda_1.$$

En séparant les variables :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dy}{\dfrac{1}{y} + \lambda_1} \\ &= \frac{ydy}{\lambda_1 y + 1} \\ &= \frac{1}{\lambda_1}\Big(1 - \frac{1}{\lambda_1 y + 1}\Big)dy \end{aligned}$$

d'où finalement : $x = \dfrac{1}{\lambda_1}y - \dfrac{1}{\lambda_1^2}\ln|\lambda_1 y + 1| + \lambda_2 \qquad \lambda_1 \in \mathbb{R}^*, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$