## Exercice 01 : Résoudre les équations suivantes

### 1) $\arccos x = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)$

Posons :

$$\theta = \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$

Donc :

$$\cos\theta = \frac{3}{4}$$

L'équation devient :

$$\arccos x = 2\theta$$

En appliquant le cosinus :

$$x = \cos(2\theta)$$

Or :

$\cos(2u) = 2\cos^2(u) - 1$

Donc :

$$x = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = 2\cdot\frac{9}{16} - 1 = \frac{18}{16} - 1 = \frac{1}{8}$$

**Solution :**

$$\boxed{x = \frac{1}{8}}$$

---

### 2) $\arcsin x = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$

Posons :

$$a = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right), \quad b = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

Alors :

$$x = \sin(a+b)$$

Or :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

On a :

$$\sin a = \frac{2}{5}, \quad \sin b = \frac{3}{5}$$

Calculons :

$$\cos a = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\cos b = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

Donc :

$$x = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{8 + 3\sqrt{21}}{25}$$

**Solution :**

$$\boxed{x = \frac{8 + 3\sqrt{21}}{25}}$$

---

## Exercice 02 : Démontrer les dérivées

---

### 1) Dérivée de $y = \arcsin x$

On pose :

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y$$

En dérivant :

$$1 = \cos y \cdot y'$$

Donc :

$$y' = \frac{1}{\cos y}$$

Or :

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

Donc :

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} \quad , \quad x \in ]-1, 1[$$

---

## 2) Dérivée de $y = \arccos x$

$$y = \arccos x \iff x = \cos y$$

Dérivons :

$$1 = -\sin y \, y'$$

Donc :

$$y' = -\frac{1}{\sin y}$$

Or :

$$\sin y = \sqrt{1 - x^2}$$

Donc :

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

---

## 3) Dérivée de $y = \arctan x$

$$y = \arctan x \iff x = \tan y$$

Dérivons :

$$1 = (1 + \tan^2 y)y'$$

Donc :

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

**Résultat :**

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}}$$

---

## Exercice 03 : Écrire sous forme algébrique

---

### 1) $\sin(\arccos x)$

Posons :

$$\theta = \arccos x$$

Alors :

$$\cos \theta = x$$

Donc :

$$\sin \theta = \sqrt{1 - x^2}$$

**Résultat :**

$$\boxed{\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}}$$

---

### 2) $\cos(\arcsin x)$

Posons :

$$\theta = \arcsin x$$

Donc :

$$\sin\theta = x$$

Alors :

$$\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$$

**Résultat :**

$$\boxed{\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}}$$

---

## 3) $\cos(2\arcsin x)$

Posons :

$$u = \arcsin x$$

Alors :

$$\sin u = x$$

Or :

$\cos(2u) = 1 - 2\sin^2(u)$

Donc :

$$\cos(2\arcsin x) = 1 - 2x^2$$

**Résultat :**

$$\boxed{1-2x^2}$$

---

## 4) $\sin(\arctan x)$

Posons :

$$\theta = \arctan x$$

Donc :

$$\tan\theta = x = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{x}{1}$$

Hypoténuse :

$$\sqrt{1+x^2}$$

Donc :

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

**Résultat :**

$$\boxed{\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

---

### 5) $\cos(\arctan x)$

$$\boxed{\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

---

### 6) $\sin(3\arctan x)$

Or :

$$\sin(3u) = 3\sin u - 4\sin^3 u$$

Avec :

$$\sin u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Donc :

$$\boxed{\sin(3\arctan x) = \frac{3x - x^3}{(1+x^2)^{3/2}}}$$

---

## Exercice 04

---

### 1) Valeurs remarquables

#### arccos

$$\arccos(1) = 0$$

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

---

### arcsin

$$\arcsin(0) = 0$$

$$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

---

### arctan

$$\arctan(0) = 0$$

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

---

## 2) Calculer

## $\arccos(\cos(7\pi/3))$

$$7\pi/3 = 2\pi + \pi/3$$

Donc :

$$\cos(7\pi/3) = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$$

Alors :

$$\boxed{\arccos(\cos(7\pi/3)) = \frac{\pi}{3}}$$

---

## $\arcsin(\sin(7\pi/3))$

$$\sin(7\pi/3) = \sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc :

$$\boxed{\arcsin(\sin(7\pi/3)) = \frac{\pi}{3}}$$

---

## $\arctan(\tan(7\pi/3))$

$$\tan(7\pi/3) = \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$$

Donc :

$$\boxed{\arctan(\tan(7\pi/3)) = \frac{\pi}{3}}$$

---

### 3) Calculer

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

---

## 4) Montrer que

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

On dérive, on trouve :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Mais :

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et :

$$f(0) = 0 = \arcsin(0)$$

Donc :

$$\boxed{f(x) = \arcsin x}$$

---

## 5) Montrer que

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Posons :

$$y = \arcsin x$$

Alors :

$$\sin y = x$$

Donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = x$$

Ainsi :

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - y$$

Donc :

$$\boxed{\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}}$$