◆ Données

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (1 \times 3)$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (3 \times 1)$$

◆ 1) Calculs de $AB, BA, A^2, B^2, (AB)^{-1}, (BA)^{-1}$

◆ Produit AB

$$AB = (1 \times 3)(3 \times 1) = (1 \times 1)$$

$$AB = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = 20 + 6 - 3 = 23$$

$$\boxed{AB = (23)}$$

◆ Produit BA

$$BA = (3 \times 1)(1 \times 3) = (3 \times 3)$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 20 & 15 & -5 \\ 8 & 6 & -2 \\ 12 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

◆ Conclusion importante

$$\boxed{AB \neq BA}$$

☞ Les matrices ne commutent pas.

◆ A^2 et B^2

- A^2 impossible (dimensions incompatibles)
- B^2 impossible

$$\boxed{A^2 \text{ et } B^2 \text{ n'existent pas}}$$

◆ Inverses

$AB = 23$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{23}$$

BA

On remarque :

$$BA = B \cdot A$$

☞ matrice de **rang 1** (produit vecteur colonne × vecteur ligne)

Donc :

$$\boxed{BA \text{ non inversible}}$$

$$(BA)^{-1} \text{ n'existe pas}$$

◆ 2) Diagonalisation de BA

◆ Matrice :

$$M = BA = \begin{pmatrix} 20 & 15 & -5 \\ 8 & 6 & -2 \\ 12 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

◆ Idée clé

Une matrice de type :

$$M = uv^T$$

a :

- une valeur propre non nulle = $v^T u = AB = 23$
- les autres = 0

◆ Valeurs propres

$$\boxed{\lambda_1 = 23, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0}$$

◆ Vecteurs propres

Pour $\lambda = 23$

On a :

$$BA \cdot B = B(AB) = 23B$$

Donc :

$$\boxed{B \text{ est vecteur propre}}$$

Pour $\lambda = 0$

On résout :

$$BAX = 0$$

$$B(AX) = 0 \Rightarrow AX = 0$$

Donc :

$$4x + 3y - z = 0$$

Base du noyau :

$$X_1 = (1, 0, 4), \quad X_2 = (0, 1, 3)$$

◆ Conclusion

$$\boxed{BA \text{ est diagonalisable}}$$

$$D = \begin{pmatrix} 23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Matrice de passage $P = (B, v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

◆ 3) Résoudre $(AB)X = B$

$$AB = 23$$

Donc :

$$23X = B$$

$$X = \frac{1}{23}B$$

Solution :

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \frac{5}{23} \\ \frac{2}{23} \\ \frac{3}{23} \end{pmatrix}}$$

◆ 4) Développement limité

$$\ln(x) \text{ au voisinage de } 1$$

Posons :

$$x = 1 + h$$

Alors :

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$$

Donc :

$$\boxed{\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)}$$