## Exercice 01 : Résoudre les équations suivantes

### 1) $\arccos x = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)$

On pose :

$$\theta = \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$

Donc :

$$\cos\theta = \frac{3}{4}$$

L'équation devient :

$$\arccos x = 2\theta$$

En appliquant le cosinus :

$$x = \cos(2\theta)$$

Or :

$\cos(2u) = 2\cos^2(u) - 1$

Donc :

$$x = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1$$

$$x = 2 \cdot \frac{9}{16} - 1$$

$$x = \frac{18}{16} - 1 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

**Solution :**

$$\boxed{x = \frac{1}{8}}$$

---

### 2) $\arcsin x = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$

Posons :

$$a = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right), \quad b = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

Alors :

$$x = \sin(a+b)$$

Or :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

On sait :

$$\sin a = \frac{2}{5}, \quad \sin b = \frac{3}{5}$$

Calculons les cosinus :

$$\cos a = \quad 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \quad \frac{21}{25} = \frac{21}{5}$$

$$\cos b = \quad 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \quad \frac{16}{25} = \frac{4}{5}$$

Donc :

$$x = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{21}{5} \cdot \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{8}{25} + \frac{3 \quad 21}{25}$$

**Solution :**

$$\boxed{x = \frac{8 + 3 \quad 21}{25}}$$

# Exercice 02

Le texte semble être :

$$f(x) = \operatorname{argch}\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$$

(la fonction inverse du cosinus hyperbolique).

## 1) Domaine de définition

On sait que :

$$\operatorname{argch}(u) \text{ existe si } u \geq 1$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 1$$

avec $x \neq 0$.

Multiplions par 2 :

$$x+\frac{1}{x} \geq 2$$

**Cas $x > 0$**

Par l'inégalité AM-GM :

$$x+\frac{1}{x} \geq 2$$

toujours vraie.

**Cas $x < 0$**

On obtient :

$$x+\frac{1}{x} \leq -2$$

donc impossible.

**Domaine :**

$$\boxed{D_f = ]0,+\infty[}$$

## 2) Limites

### a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

Quand $x \to 0^+$,

$$\frac{1}{x} \to +\infty$$

donc :

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \to +\infty$$

et :

$$\operatorname{argch}(+\infty) = +\infty$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$$

### b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Quand $x \to +\infty$,

$$x + \frac{1}{x} \to +\infty$$

donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

---

## 3) Résoudre $f(x) = 0$

$$\operatorname{argch}\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

Or :

$$\operatorname{argch}(1) = 0$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

$$x^2 + 1 = 2x$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

**Solution :**

$$\boxed{x = 1}$$

---

## 4) Variations de $f$

Posons :

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Alors :

$$f(x) = \operatorname{argch}(g(x))$$

Comme argch est croissante, le sens de variation dépend de $g$.

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$g'(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2}$$

- si $0 < x < 1$, $g'(x) < 0$
- si $x = 1$, $g'(x) = 0$
- si $x > 1$, $g'(x) > 0$

Donc :

- $f$ décroît sur $]0, 1]$
- $f$ croît sur $[1, +\infty[$

et :

$$f(1) = 0$$

#### Tableau de variations

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0^+ & 1 & +\infty \\ \hline f(x) & +\infty & \searrow 0 \nearrow & +\infty \end{array}$$

## Exercice 03 : Simplifier

### 1) $ch(argsh(x))$

Posons :

$$u = argsh(x)$$

Alors :

$$sh(u) = x$$

Or :

$$ch^2u - sh^2u = 1$$

Donc :

$$ch^2u = 1 + x^2$$

Comme $ch(u) \geq 0$ :

$$\boxed{ch(argsh(x)) = \quad 1 + x^2}$$

## 2) $sh(argch(x))$

Posons :

$$u = argch(x)$$

Alors :

$$ch(u) = x$$

Donc :

$$sh^2u = x^2 - 1$$

Comme $u \geq 0$, alors $sh(u) \geq 0$ :

$$\boxed{sh(argch(x)) = \quad x^2 - 1}$$

(valable pour $x \geq 1$)

# Exercice 04 :

$$x^2y' - y^2 = 0.$$

*Il évident que* $y = 0$ *est une soution, pour* $y \neq 0$ *on a*

$$\begin{aligned} x^2y' - y^2 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x^2} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2} \\ &\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{1 - cx}{x}, \qquad c \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{x}{1 - cx} \qquad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

*Donc l'ensemble* $S$ *des solutions est*

$$S = \{y = 0 \quad ou \quad y = \frac{x}{1 - cx}, \qquad c \in \mathbb{R}\}$$

$$(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0 \qquad (*).$$

*Considérant le système linéaire*

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y+4=0 \end{cases},$$

*Le déterminant de ce système est*

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

*Alors le système admet une solution unique* $(k,l)=(-1,3)$, *en faisant le changement de variables*

$$x=\alpha-1, \qquad y=\beta+3.$$

*On obtient*

$$\begin{cases} x+y-2=\alpha+\beta \\ x-y+4=\alpha-\beta \\ dx=d\alpha \\ dy=d\beta, \end{cases}$$

*et l'équation* $(*)$ *devient*

$$(\alpha+\beta)d\alpha+(\alpha-\beta)d\beta=0,$$

*est une équation homogène. En posant* $\beta=t\alpha$, *on obtient*

$$(\alpha+t\alpha)d\alpha+(\alpha-t\alpha)(\alpha dt+td\alpha)=0$$

*d'où (aprés des simplifications)*

$$(1+2t-t^2)d\alpha+\alpha(1-t)dt=0$$

*séparons les variables*

$$\frac{d\alpha}{\alpha}+\frac{(1-t)dt}{1+2t-t^2}=0$$

*on intègre il vient*

$$\ln|\alpha|+\frac{1}{2}\ln|1+2t-t^2|=c, \qquad c\in\mathbb{R}$$

*où*

$$\alpha^2(1+2t-t^2)=k, \qquad k\in\mathbb{R}$$

*revenons aux variables* $x,y$ :

$$(x+y)^2\left[1+\frac{2(y-3)}{x+1}-\frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\right]=k, \qquad k\in\mathbb{R}$$

*ou encore*

$$x^2+2xy-y^2-4x+8y=c_1, \qquad c_1\in\mathbb{R}.$$